Correction des mystères de l'horloge du Lycée de Briançon

Exercice 1 : On calcule le périmètre du cercle dessiné par l'extrémité de l'aiguille que l'on multiplie par le double du nombre de jours. Il y a 74 ans et 19 années bissextiles.
L= 2πx0,36x(365x74+19)x2 = 122 276 m soit **122,276 km.**

Exercice 2 : La petite aiguille fait un tour en 12 h soit 720 min, la grande fait un tour en 52 min.
Pour être à nouveau toutes les 2 sur le 12 il faut qu'elles aient fait un nombre entier de tours qui sera un multiple de 720 et 52.
Le plus petit multiple commun à 720 et 52 est 180x13 = 2340 ($720 = 2^4 x 3^2 x5$ et $52 = 13x\ 2^2$)
2340 min = 39 h ; il faut que les aiguilles arrivent sur le 12 donc le plus petit multiple commun de 39 et 12 est 13x3x4 = 156.
Il faut attendre 156 h pour que les aiguilles se superposent soit 6 jours 12 h, on sera le 7 avril à 24 h.

Exercice 3 : Vitesse angulaire de la grande aiguille en radian/min $\frac{2\pi}{60}$

Vitesse angulaire de la petite aiguille en radian/min $\frac{2\pi}{720}$

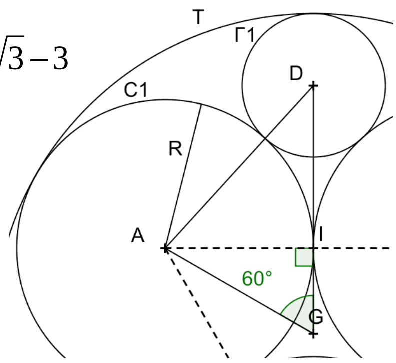
A l'instant t = 0 la petite aiguille a pour position $\frac{2\pi}{3}$ et la grande 0. Pour que les deux aiguilles se superposent à l'instant t il faut que $\frac{2\pi}{60}t = \frac{2\pi}{720}t + \frac{2\pi}{3}$

Donc $\frac{1}{60}t = \frac{1}{720}t + \frac{1}{3}$ d'où $12t = t+240$ donc $11t = 240$ et $t = \frac{240}{11}$ min = $(21+\frac{9}{11})$ min
= 21 min et $\frac{9\times 60}{11}$ s = 21 min et 49,1 s. **Il sera alors 16 h 21 min 49 s.**

Exercice 4 : Nombres de coups entre 7 h du matin et 12 h et entre 1 h et 9 h du soir : 102 coups.
Le poids descend de 102 cm par jour.
11,8 m = 1180 cm 1180:102 = 11 reste 58
De 7 h à 12 h la cloche sonne 7+8+9+10+11+12 = 57 coups et de 7 h à 13 h sonne 58 coups.
La cloche sonnera pour la dernière fois au bout de 11 jours et 13 h soit le 12 mai à 13 h.

Exercice 5 :

a) Le triangle AGI est rectangle en I, $\widehat{GAI}$ = 30° , AI=R , AG= 1-R
Donc cos 30° = $\frac{AI}{AG}$ d'où $\frac{R}{1-R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$**. On en déduit que R =** $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}-3$



b) On se place dans le triangle AGD, AI est la hauteur issue de A ; AG = 1-R, AD = R+r, AI = R, DG = 1-r

On peut utiliser le théorème d'Al-Kashi : $AD^2 = AG^2 + GD^2 - 2\,AG.GD \cos \widehat{GAI}$

$(r+R)^2 = (1-R)^2+(1-r)^2-2(1-R)(1-r).\frac{1}{2}$

On obtient r = $\frac{1-R}{1+3R}$

On remplace par la valeur exacte de R et on a : **R =** $\frac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-4}$ **=** $\frac{2\sqrt{3}-1}{11}$

Autre méthode : On utilise la trigonométrie dans le triangle AGI pour calculer IG et le théorème de Pythagore dans le triangle AID pour calculer ID. De plus on sait que ID = GD-GI. On obtient alors une équation d'inconnue r.

c) R = $0,5(2\sqrt{3}-3)$ = 0,23 m soit **23 cm**

r = $0,5\,\frac{2\sqrt{3}-1}{11}$ = 0,11m soit **11 cm**

d) L'aire centrale est formée par l'aire du triangle ABC de côté 2R diminuée de l'aire de 3 sixièmes de disque de rayon R.

Aire du triangle ABC : $\frac{1}{2}2R\times2R\times\frac{\sqrt{3}}{2} = R^2\sqrt{3} = 0,5^2(2\sqrt{3}-3)^2\sqrt{3} = 0,25\,(2\sqrt{3}-3)^2\sqrt{3}$

Aire centrale : $R^2\sqrt{3} - \pi R^2\frac{1}{2} = R^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}) = 0,5^2(2\sqrt{3}-3)^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$

$= 0,25\,(21-12\sqrt{3})(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$ = 0,25 x 0,0347 m^2 soit **0,25** x **347 cm^2 = 87 cm^2**