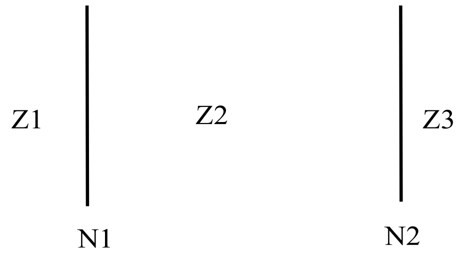
Droites et plans.

Problématique: On veut savoir en combien de zones (z), n droites coupent le plan.

- Dans le cas où les droites sont parallèles.



On remarque que pour 1 droite le plan est divisé en 2 zones. Pour 2 droites on a 3 zones et pour 3 droites on a 4 zones. On peut conjecturer la formule suivante:

n droites donnent➔ n+1 zones.

Procédons par récurrence pour démontrer cette conjecture.

Pour 1 droite on a 2 zones, soit 1+1 zones.

On admet que la conjecture est vraie jusqu'à n droites.

Démontrons qu'elle s'applique aussi pour n+1 droites.

On remarque qu'une nouvelle droite coupe une zone déjà existante en deux; elle ajoute une zone.

n droites	donnent	n+1 zones
+1 droite	➔	+1 zone
n+1 droites	➔	(n+1)+1 zones, soit n+2

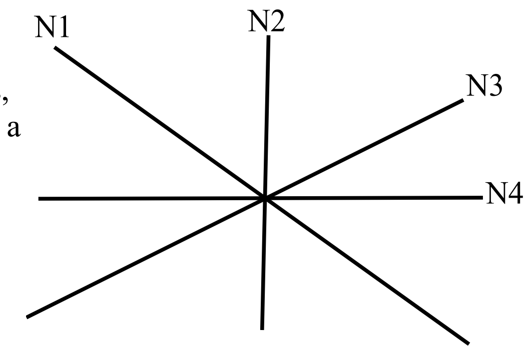
Par conséquent, la conjecture est vraie:

Propriété 1: Dans le cas de droites parallèles, pour n droites, on a n+1 zones.

- <u>Dans le cas où les n droites sont concourantes.</u>

On remarque que lorsque l'on a une droite, le plan est divisé en deux zones. Pour deux droites on a quatre zones, pour trois droites on a six zones, et pour quatre droites on a huit zones. On peut poser la formule suivante:

n droites donnent 2n zones.

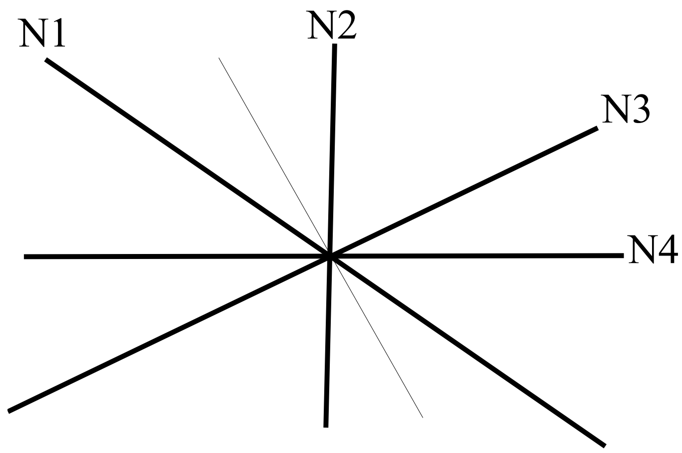


Procédons par récurrence pour la démontrer.

Pour une droite on a deux zones, soit 2 fois 1.

On admet cette formule jusqu'à un rang n.

Démontrons qu'elle est encore vraie pour n+1 droites.



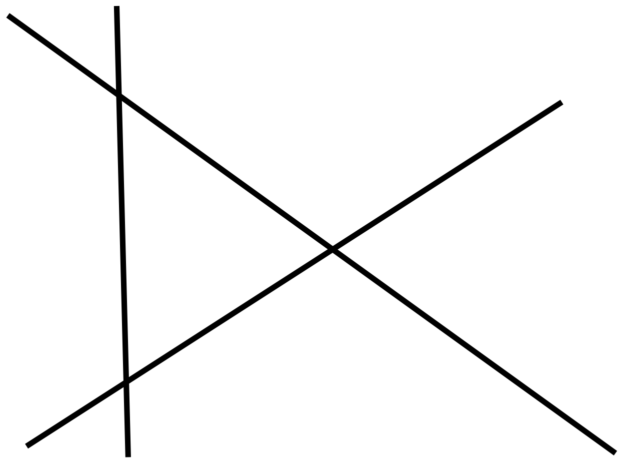
On remarque qu'une nouvelle droite coupe deux zones déjè existantes en deux; elle ajoute ainsi deux nouvelles zones.

n droites	donnent	2n zones
+1 droite	➔	+2 zones
n+1 droites	➔	2n+2 zones, soit 2(n+1)

Par conséquent, la formule est vraie:

Propriété 2: Dans le cas de droites concourantes, pour n droites, on a 2n zones.

- Dans le cas où les droites ne sont ni concourantes ni parallèles.



Nb de droites	*Nb de zones*
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11

On remarque que si l'on additionne les nombres présents dans chaque ligne, on obtient la somme des n premiers entiers. Par exemple 0+1=1, 1+2=3, 2+4=6, 3+7=10, ...
Ce qui nous donne le tableau suivant:

Nb de droites	*Nb de zones*	S_i
0	1	1
1	2	3
2	4	6
3	7	10
4	11	15

1, 3, 6, 10, ... est la suite des sommes des n premiers nombres entiers.
On note S_i la somme des i premiers entiers avec i>1

On a alors: $S_n=1+2+3+4+ \ldots\ldots\ldots\ldots+n$
$\underline{S_n=n+(n-1)+(n-2)+ \ldots\ldots+1}$
$2S_n=n+1+n+1+n+1+ \ldots\ldots\ldots\ldots+n+1$ (n fois n+1)

$S_n= n\dfrac{(n+1)}{2}$ avec n>1.

Nb de droites	*Nb de zones*	S_{i+1}
n	S_{n+1} - n = $n\dfrac{(n+1)}{2}+1$	S_{n+1}= $(n+1)\dfrac{(n+2)}{2}$
$\dfrac{\sqrt{(8z+7)}}{2}-\dfrac{1}{2}$	z	

Cette dernière formule ne s'applique que pour z défini par $n\dfrac{(n+1)}{2}+1$ avec n appartenant aux entiers naturels.

Démonstration de cette formule:

Nous procéderons par récurrence.

Pour n=1, nous avons $1\frac{(1+1)}{2}+1$ =2 zones.

Nous admettons la formule jusqu'à un rang n.

Lorsque l'on rajoute une droite, celle-ci coupe chacune des autres droites existantes, elle rajoute n+1 zones.

n droites donnent $n\frac{(n+1)}{2}+1$ zones

+1 droite ➔ +(n+1) zones

n+1 droites ➔ $n\frac{(n+1)}{2}+1$ +(n+1) = (n(n+1)+2(n+1))/2 + 1

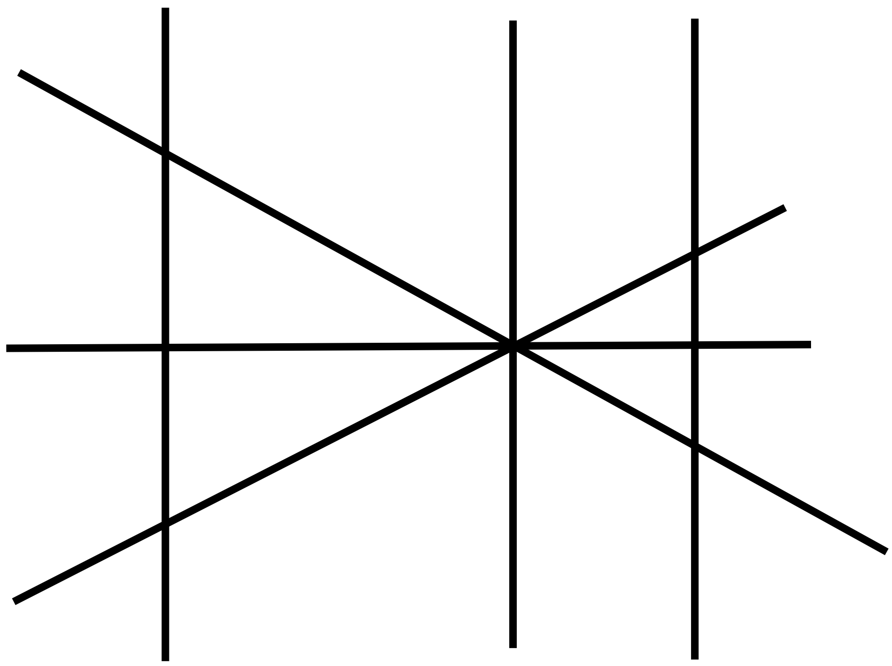
= $(n+1)\frac{((n+1)+1)}{2}+1$

Ce qui démontre notre formule.

Propriété 3: Dans le cas de droites ni parallèles, ni concourantes, pour n droites nous avons $n\frac{(n+1)}{2}+1$ zones.

- Autres cas.

Nous considérons ici p droites parallèles et c droites concourantes en un seul point.



Expérimentalement, on obtient le tableau ci-dessous:

Nb. de droites parallèles (p)	***Nb. de droites concourantes en un point (c)***	***Nb. de zones (z)..***
2	3	9
2	4	12
2	5	15
3	3	12
3	4	16
3	5	20
4	3	15
4	4	20
4	5	25

On peut conjecturer de ce tableau la formule suivante: $z=c(p+1)$

Nous n'avons pas poursuivi nos recherches et ce dernier résultat n'est pas démontré. De plus, d'autres cas tels que des droites parallèles et concourantes en plusieurs points n'ont pas été traités.

Remarque: Par contre nous avons cherché à élargir notre étude en posant le problème dans l'espace: en combien de zones (z), p plans coupent l'espace ?
Nous avons abordé le sujet mais nous nous sommes vite rendu compte que les différentes situations étaient délicates à traiter dans la mesure où chaque cas était subdivisé en plusieurs zones ...