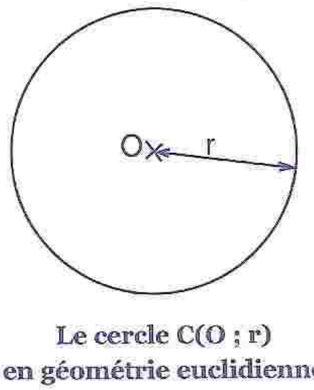
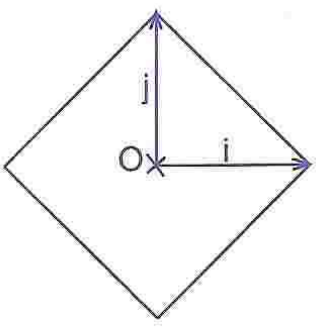
Une autre distance

L'article qui suit est adapté d'un texte écrit par un groupe de lycéens d'une classe du Lycée d'Altitude de Briançon, dans le cadre d'un atelier Maths en Jeans (professeur M. Hubert Proal).



Le cercle C(O ; r) en géométrie euclidienne



Le cercle C(O ; r) dans notre nouvelle géométrie

En géométrie euclidienne, la distance de deux points M(x ; y) et N(x' ; y') définis par leurs coordonnées dans un repère orthonormé (O ; i ; j), est donnée par la formule suivante :

$$d(M ; N) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}.$$

Dans le texte qui suit, la distance ne répondra plus à cette définition classique, mais sera définie par l'égalité : **$d(M ; N) = |x - x'| + |y - y'|$**

Un drôle de cercle

Cherchons l'équation générale d'un cercle avec cette définition de la distance.
Par définition, un cercle est l'ensemble des points situés à égale distance de son centre.
En géométrie euclidienne, nous obtenons le dessin ci-contre.

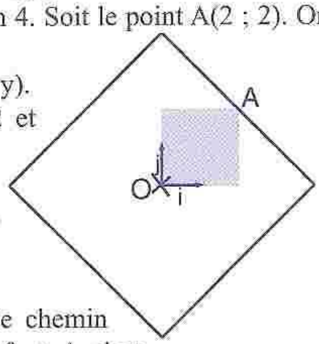
Dans le cas de notre étude, nous avons :
$d(O ; M)= |x| + |y|$
Considérons le cercle de rayon 1 et de centre O(0,0) dans un repère (O ; i ; j).
L'équation de ce cercle est : $|x| + |y| = 1$, ce qui donne :

- pour x>O et y>O $y = 1 - x$
- pour x<O et y>O $y = 1 + x$
- pour x<O et y<O $y = -(x+1)$
- pour x>O et v<O $y = x - 1$

On obtient la représentation graphique ci-contre, qui peut surprendre si l'on songe à une roue, par exemple.

Les chemins les plus courts

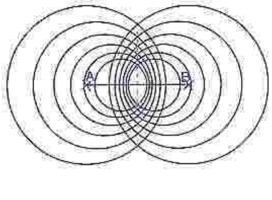
Dans le repère (O ; i ; j), considérons le cercle de centre O et de rayon 4. Soit le point A(2 ; 2). On a OA=4.



Soit un point M(x ; y).
Lorsque $0 < x < 2$ et $0 < y < 2$, on a :
d(OM)+d(MA)
= (x+y)+(2–x+2–y)
= x+ y+2–x+2–y
OM+MA = 4
On remarque que le chemin le plus court entre 0 et A n'est plus unique (comme c'est le cas en géométrie euclidienne). Tous les chemins de 0 à A qui restent dans le carré hormis ceux qui reviennent sur eux-mêmes) mesurent 4.

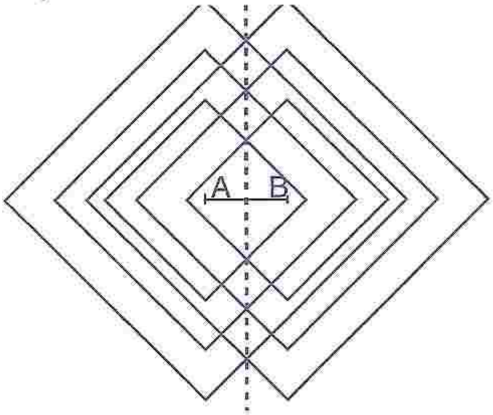
La médiatrice d'un segment

Par définition, en géométrie euclidienne, la médiatrice de [AB] est l'ensemble des points situés à égale distance de A et de B.
Pour tracer la médiatrice d'un segment [AB], en pratique, on trace le cercle de centre A et de rayon r et le cercle de centre B et de même rayon. La médiatrice de [AB] est alors l 'ensemble des intersections des deux cercles quand le rayon r croît.

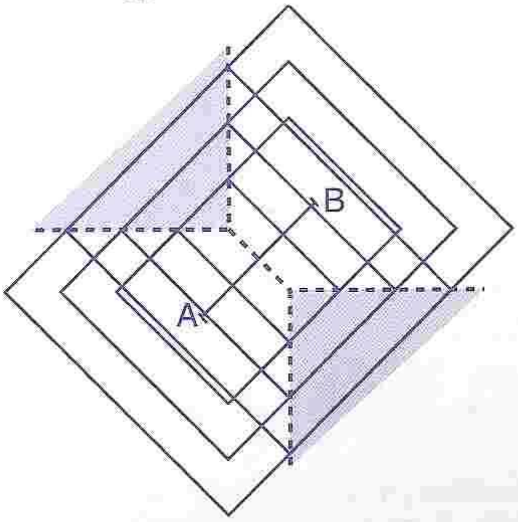


Avec notre nouvelle définition de la distance, la méthode reste la même. Cependant, l'ensemble obtenu n'est plus toujours une droite et il dépend de la position des points (chose qui n'était pas le cas en géométrie euclidienne). Nous distinguerons trois cas.

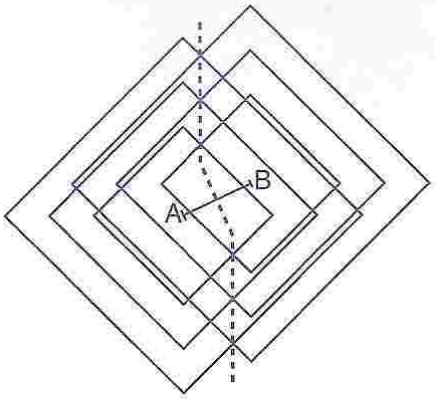
• cas n° 1: Lorsque les points sont sur un axe horizontal, on obtient une droite:



• cas n° 2: Lorsque les points sont disposés selon un axe orienté d'un angle de 45' par rapport à l'axe des abscisses, on obtient un ensemble composé: d'un segment et de deux cônes (se développant à chaque extrémité) où toutes les valeurs comprises à l'intérieur appartiennent à l'ensemble.



• cas n° 3: lorsque les points ne sont pas dans les cas 1 et 2, c'est-à-dire quand les points sont disposés selon un axe orienté d'un angle inférieur à 451 par rapport à l'axe des abscisses. On obtient alors une droite brisée.



Pour les autres cas, on se replacera par symétrie dans les cas 1, 2 ou 3

Remarque: quand on déplace B, il y a une certaine continuité (voir le "film" ci-contre).

Le périmètre du cercle

On remarque que la géométrie définie par cette nouvelle distance, le périmètre d'un cercle est égal à 8r. On sait qu'en géométrie euclidienne, le périmètre du cercle est égal à $2\pi r$.

D'où "π"=4.

Le théorème de Pythagore

Le théorème de PYTHAGORE n'existe plus avec notre distance:

$$BC^2 = (AB+AC)^2 = AB^2 + 2AB.AC + AC^2.$$

Les axiomes d'une distance

Vérifions que la distance que nous avons définie satisfait bien aux trois axiomes d'une distance.

1) Si $d(X ; Y) = O$ alors $X=Y$
2) Pour tout point, $d(X ; Y) = d(Y ; X)$
3) L'inégalité triangulaire:

$$d(X ; Z) \leq d(X ; Y) + d(Y ; Z)$$

On peut remarquer que dans notre cas, le dernier axiome a une particularité de plus. En effet, en géométrie euclidienne, l'inégalité devient égalité lorsque les trois points X.Y et Z sont alignés. Ici. l'égalité se retrouve lorsque les trois points forment un triangle rectangle dont l'un des côtés est positionné de manière verticale ou horizontale (c'est même la définition :

$$d(X ; Y) = |x - x'| + |y - y'|.$$

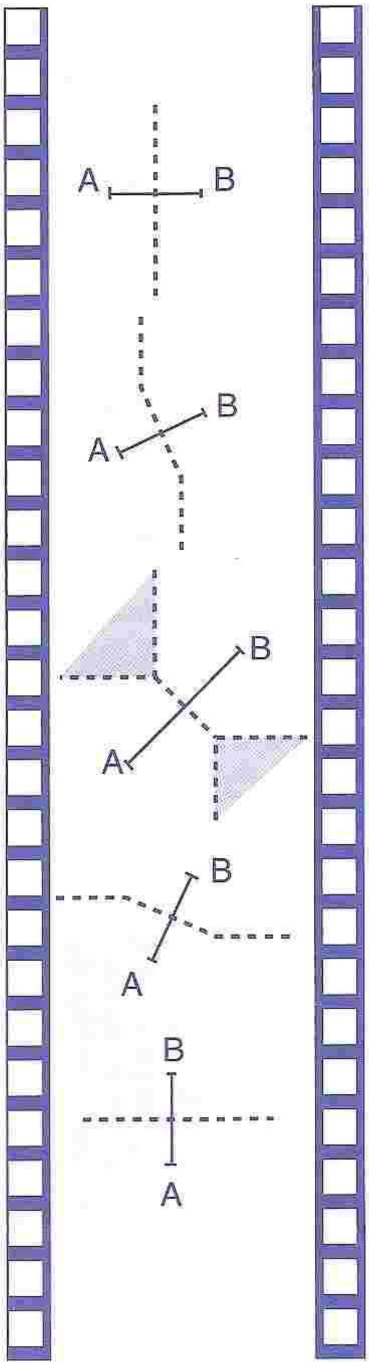
Les transformations

En faisant de nombreux dessins. avec des réflexions et rotations de différents angles, on arrive à la conclusion qu'il y a "moins" d'isométries qu'en géométrie euclidienne :

• pour les réflexions, seules les réflexions d'axe vertical, horizontal ou formant un angle de 45° par rapport à l'horizontale demeurent des isométries

• pour les rotations, seules les rotations d'angle $\pi/2$ demeurent des isométries.

FIN.



Le "film" de la transformation de la médiatrice de [AB] lorsque l'angle entre (AB) et la direction horizontale varie de façon continue.