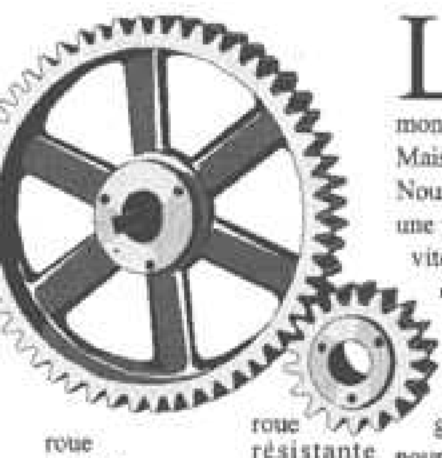
par Nicolas Terracol

Mathématiques des engrenages

L'article qui suit est adapté d'un texte écrit par un lycéen d'une classe terminale du Lycée d'Altitude de Briançon, dans le cadre d'un atelier Maths en Jeans (professeur M. Hubert Proal).



Notations pour une roue d'engrenage :
On désignera par
W sa vitesse angulaire.
D son diamètre.
Z son nombre de dents.
p le pas de sa denture.

Les exemples d'utilisation des engrenages dans la vie de tous les jours sont nombreux : boites de vitesse de nos voitures, montres et horloges ...
Mais de quoi s'agit-il ?
Nous disposons à l'entrée d'un arbre tournant à une vitesse angulaire W. A la sortie on veut une vitesse angulaire k.W (où k = 0,23 par exemple).
Il faut donc essayer de trouver une méthode générale pour placer des engrenages (dont on définira le plus petit et le plus grand), qui ont par exemple entre 15 et 50 dents pour obtenir le rapport k souhaité.
Pour engrener ensemble, les deux roues d'un engrenage doivent évidemment avoir le même pas.
La relation qui lie la circonférence et le pas est la suivante : $\pi D = Z p$, d'où $p = \pi D/Z$.

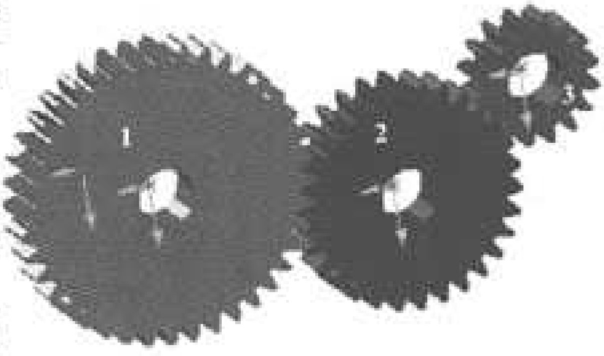
La relation fondamentale

La relation fondamentale entre deux engrenages 1 et 2 est la suivante : $W_1 Z_1 = W_2 Z_2$

1) Démontrez cette relation fondamentale.

Par définition, le rapport k d'un montage d'engrenage est égal au quotient de la vitesse angulaire de sortie sur la vitesse angulaire d'entrée.
Ce rapport est aussi égal au rapport inverse du nombre de dents des roues ou des diamètres :

$$k = \frac{W_2}{W_1} = \frac{Z_1}{Z_2}.$$



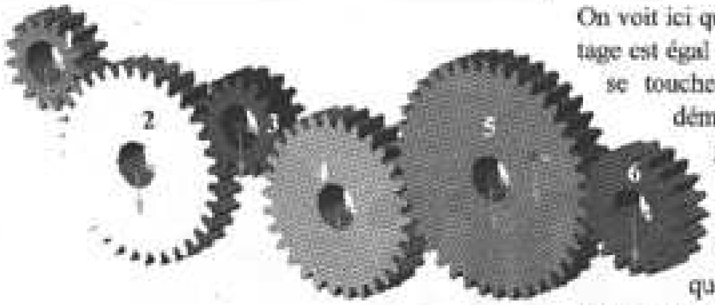
Le rôle des roues intermédiaires

Etudions le rapport de transmission d'un système de trois roues (ou deux couples d'engrenages).

2) En appliquant la relation fondamentale deux fois, puis en simplifiant, montrez que

$$W_3 = W_1 \frac{Z_1}{Z_3}$$

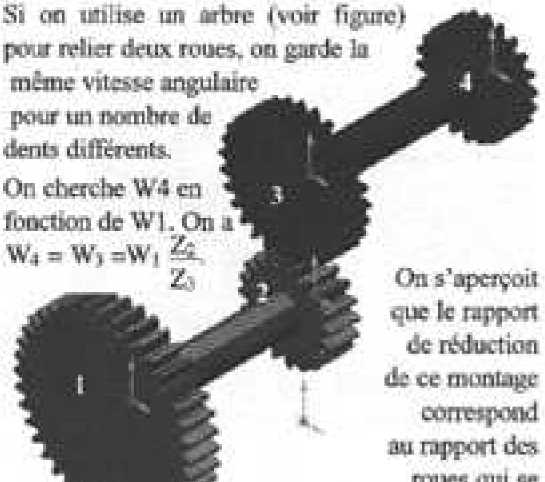
On retrouve bien ici notre relation initiale entre la vitesse d'entrée et celle de sortie. Cependant on s'aperçoit que la roue 2 n'a aucune influence sur le rapport de réduction de ce montage.
On démontre facilement par récurrence que les roues intermédiaires situées entre l'entrée et la sortie n'ont aucune influence sur le rapport de réduction du montage et ce quelle que soit leur place et leur nombre.
Par exemple pour le montage suivant, les roues intervenant dans le rapport de réduction sont la 1 et



la 6 seulement. On a la relation $W_6 = W_1 \frac{Z_1}{Z_6}$
Les roues intermédiaires n'ont aucune influence sur le rapport de réduction, mais peuvent permettre de changer le sens de rotation. Le rapport ne dépend alors que du nombre de dents des roues d'entrée et de sortie. Al'aide d'engrenages ayant entre 15 et 50 dents, on n'obtiendra donc qu'un nombre limité de rapports de réduction possibles et pas nécessairement ceux désirés. Par exemple si on veut réaliser le rapport 6, il faut trouver deux roues dont le quotient des nombres de dents vaut 6. Or dans l'intervalle [15,50], on ne dispose pas des roues nécessaires.
Il faut donc imaginer une astuce pour élargir nos possibilités.

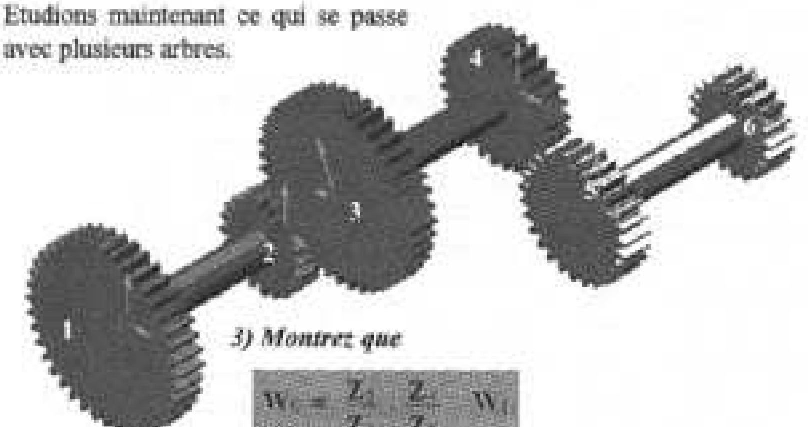
L'utilisation des arbres

Si on utilise un arbre (voir figure) pour relier deux roues, on garde la même vitesse angulaire pour un nombre de dents différents.
On cherche W4 en fonction de W1. On a $W_4 = W_3 = W_1 \frac{Z_2}{Z_3}$



On s'aperçoit que le rapport de réduction de ce montage correspond au rapport des roues qui se touchent directement.

Etudions maintenant ce qui se passe avec plusieurs arbres.



3) Montrez que

$$W_6 = \frac{Z_2}{Z_3} \cdot \frac{Z_4}{Z_5} \cdot W_1$$

On voit ici que le rapport de réduction de ce montage est égal au produit des rapports des roues qui se touchent directement. Par récurrence on démontre que le rapport total d'un montage du type précédent est égal au produit des rapports des montages intermédiaires
On voit maintenant que si le rapport que l'on veut réaliser est compliqué il suffira de le décomposer en pleins de petits rapports simples à réaliser.
Le rapport 6 qui était infaisable tout à l'heure devient désormais réalisable. Il suffit de monter en série deux montages ayant pour rapport 2 et 3.
On dispose désormais d'une technique qui nous permet d'obtenir des rapports plus complexes que précédemment. Mais essayons de trouver une méthode qui nous permettrait d'obtenir ces rapports.

Un début d'analyse mathématique

Supposons toujours que nous disposions de roues ayant entre 15 et 50 dents. Voyons quels résultats nous pouvons obtenir. Il s'agit de fractionner le rapport désiré sous la forme d'un produit de rapports réalisables avec nos engrenages. Les nombres-clés à réaliser sont les nombres premiers.

1 - On considère le nombre premier que l'on veut réaliser, par exemple 7. Ce nombre n'appartient pas à l'intervalle défini. Alors on le divise par un nombre proche, de préférence inférieur à 7, par exemple 6.

2 - Ce rapport de 7/6 correspond à quelque chose de réel. Il s'agit du couple de roues d'engrenages composé d'une roue de 7 dents qui engrène avec une roue de 6 dents, ou, ce qui revient au même, d'une roue de 21 dents avec une roue de 18 dents (toutes les 2 comprises dans notre intervalle).

3 - Maintenant que le nombre premier est obtenu, il ne reste plus qu'à multiplier ce rapport par le diviseur initial (6 dans notre exemple).
Le montage du rapport 7 est donc constitué:
-d'une roue de 21 dent qui engrène avec une roue de 18 dents.
-d'une roue de 45 dent qui engrène avec une roue de 15 dents.
-d'une roue de 40 dent qui engrène avec une roue de 20 dents.

4) Cette méthode sem-ble très efficace. Mais quels résultats permet-elle d' obtenir ?

Les nombres premiers qui se trouvent avant l'intervalle considéré (ex : 5 ; 7 ; 11) ou dans l'intervalle (ex:17 ; 29) peuvent être obtenus par une des méthodes décrites dans l'article.

**<u>Conjecture</u> : On ne peut pas réaliser les nombres premiers supérieurs à ceux de l'intervalle, car ils n'ont aucun lien avec les roues de l'intervalle.
Par exemple, un rapport de 53 semble, a priori, irréalisable. Il faudrait le simplifier mais il est irréductible.**

N.T