MATH EN JEAN'S 2000-2001

LES SURPLOMBS

Élèves : Nicolas ASCHETINO, Vincent RONDOT et Rémy SERROR (Terminale S-si)
Enseignant : Hubert PROAL (Lycée d'Altitude de Briançon)
Chercheur : Patrick VEROVIC (Université de Savoie)
Établissement jumelé : Lycée Jean Moulin de Pézenas (Hérault)

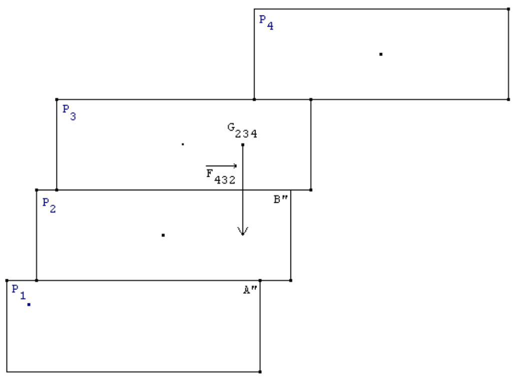
N.B. : Les commentaires de l'enseignant et du chercheur ont été mis entre crochets.

Sujet : On souhaite déterminer la longueur au sol du plus grand surplomb possible tenant en équilibre et construit à l'aide de briques ayant mêmes poids et dimensions, et ce, *sans utiliser de colle*.

Travail de recherche :

Nous avons fait des expériences avec des pièces de bois. [C'est aussi ça faire de la science...]

Après quelques essais, nous avons formulé une première loi : pour que l'ensemble de l'édifice tienne en équilibre, il suffit que son isobarycentre se projette verticalement sur la première pièce.



En modélisant alors la situation selon cette règle, les résultats obtenus ne correspondaient pas à la réalité ; en effet, d'après notre loi, l'édifice ci-contre devrait tenir, ce que l'expérience infirme. Ainsi, la formulation de la loi physique n'était pas bonne. [Comme quoi, faire des sciences n'est pas toujours si simple...]

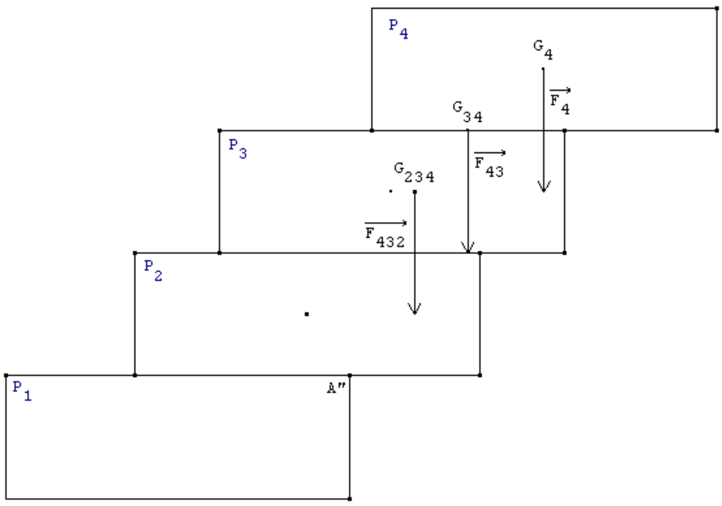
Par la suite, une deuxième loi a été proposée : pour que l'édifice tienne en équilibre, il suffit que pour chaque pièce, l'isobarycentre de toute la partie au-dessus d'elle se projette verticalement sur elle.

Par exemple, dans la figure ci-contre, l'ensemble sera en équilibre lorsque :

1) Le barycentre de la pièce P_4 se projette sur la pièce P_3 (c'est le cas - flèche F_4);

2) L'isobarycentre des pièces P_4 et P_3 se projette sur la pièce P_2 (c'est le cas - flèche F_{43})

3) L'isobarycentre des pièces P_4, P_3 et P_2 se projette sur la pièce P_1 (ce n'est pas le cas - flèche F_{432})



Ici, l'édifice va pivoter autour du point A".

a) Surplomb avec marches régulières

Pour quelques pièces, cette deuxième loi semble s'appliquer et on peut en venir à penser que cela fonctionnera également pour un très grand nombre de pièces, mais nous ne sommes pas arrivé à le démontrer.

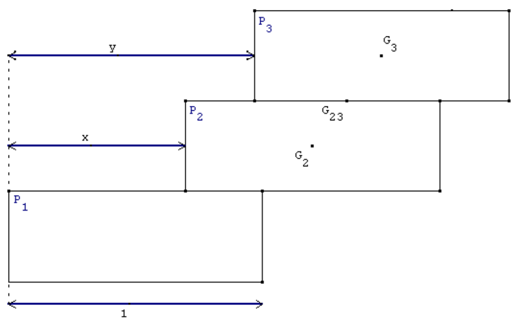
Nombre de pièces	*Taille de la marche*	*Taille du surplomb*
2	1/2	1/2
3	1/3	2/3
4	1/4	3/4
n	1/n	(n – 1)/n

[Les élèves n'ont pu trouver de lien dans le passage de n pièces à n+1 pièces (du reste, il ne devrait pas y en avoir...). En revanche, avec la modélisation ci-dessous, il est possible de montrer que la nouvelle loi est la bonne.]

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}=1$ en restant inférieur à 1, cela signifie qu'un surplomb construit selon des marches régulières a une longueur au sol n'excédant pas au mieux celle de deux pièces.

b) Surplombs avec marches irrégulières

Cas de trois pièces
Si on applique la loi à notre modèle, on obtient un système de deux inéquations sur les tailles x et y des deux marches pour que l'édifice soit en équilibre.
En effet :

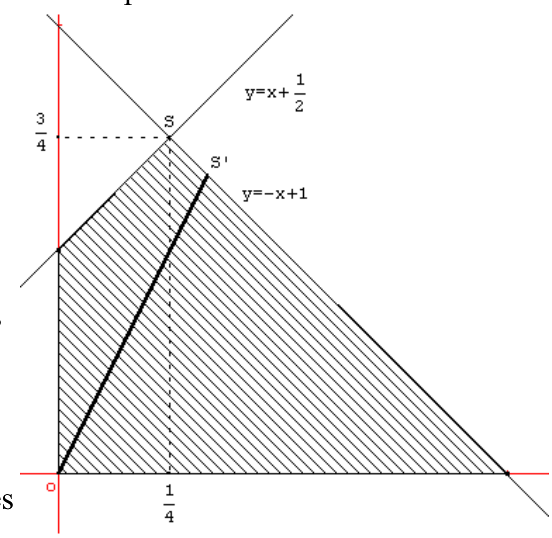


1) Le barycentre de la pièce P_3 doit se projeter sur la pièce P_2, d'où $y+\frac{1}{2}\leq x+1$;

2) L'isobarycentre des pièces P_3 et P_2 doit se projeter sur la pièce P_1, d'où $\frac{x+\frac{1}{2}+y+\frac{1}{2}}{2}\leq 1$.

La résolution de ce système et la recherche de la valeur maximale de *y* (longueur au sol du surplomb moins une pièce) correspond, en mathématiques, à un problème d'optimisation linéaire.

Les solutions sont les points à l'intérieur du polygone hachuré et la meilleure d'entre elles correspond au point S = $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, c'est-à-dire à des marches de tailles $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ (de bas en haut).



[Le point S' donne la meilleure solution pour des marches régulières car, dans ce cas, on a en plus y = 2x.]

Cas de quatre pièces
L'idée est la même qu'avec trois pièces et nous obtenons cette fois un système de trois inéquations à trois inconnues x, y et z (tailles des trois marches).

$$z+\frac{1}{2}\leq y+1 \quad ; \quad \frac{(z+\frac{1}{2}+y+\frac{1}{2})}{2}\leq 1+x \quad ; \quad \frac{(z+\frac{1}{2}+y+\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2})}{3}\leq 1$$

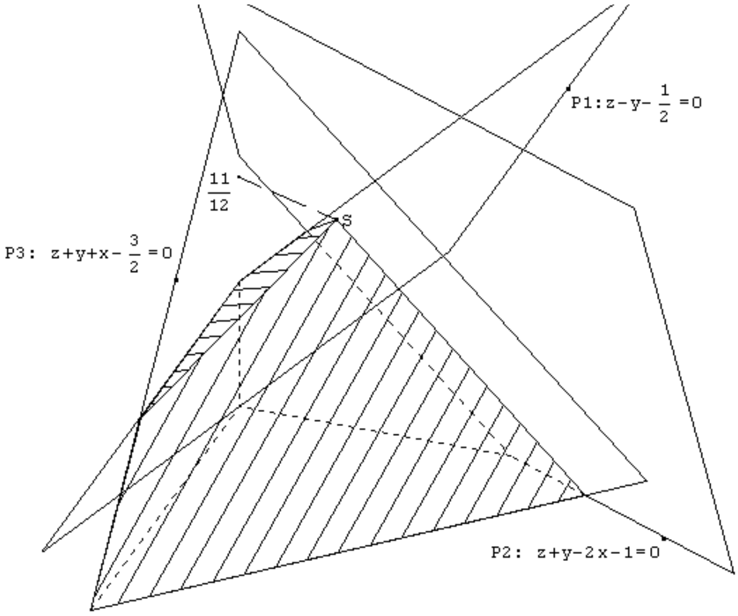
Pour le résoudre, nous avons dû travailler avec des logiciels de géométrie dans l'espace.

On trouve le point

$S = \left(\frac{1}{6} , \frac{5}{12} , \frac{11}{12} \right)$

comme meilleure solution, ce qui correspond à des marches de tailles

$\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ (de bas en haut).



<u>Cas général</u>

On a démontré par récurrence sur le nombre n de pièces le résultat suivant :

<u>Théorème</u> :

Pour un surplomb en équilibre constitué de n pièces, la meilleure solution est obtenue avec des marches de tailles égales à 1/(2k) pour k = 1 , ... , n – 1 (numérotation de bas en haut).

En fait, l'élément déterminant dans le passage de n à n + 1 (qui nous a permis de faire la démonstration) est que quand on rajoute une pièce, il est préférable de le faire *sous* l'ancien l'édifice (et non pas au-dessus), afin de *garder* les anciennes inéquations. [En outre, pour trouver la meilleure solution avec des marches régulières, il suffit de regarder l'intersection du polyèdre des contraintes ci-dessus avec la droite issue de O et dirigée par le vecteur (1 , 2 , 3).]

c) Conclusion

D'après ce qui précède, tout surplomb fait de n briques et en équilibre à une longueur au sol d'au moins L(n) = 1 +1/2 + 1/3 + ... + 1/n.
Or les élèves du lycée Jean-Moulin de Pézenas, avec qui nous étions jumelé, ont montré que L(n) tend +∞ quand n tend vers +∞

Exposé des élèves lors du congrès Math en Jean's

à l'Université de Villetaneuse

[Il n'y a pas eu de réel jumelage entre le lycée d'Altitude de Briançon et le lycée Jean Moulin car c'est par téléphone ou courrier que les élèves s'échangeaient leurs résultats. Aussi, les élèves de Pézenas ont abordé tout le problème d'une manière différente et ont fait d'avantage d'expériences pour déterminer la forme d'un édifice en équilibre.]

Par conséquent, la réponse à notre question initiale est

**« ON PEUT CONSTRUIRE DES SURPLOMBS EN ÉQUILIBRE
AUSSI GRANDS QUE L'ON VEUT !... »**

[Lors d'un déplacement à la cité d'Angkor au Cambodge, nous avons pu constater que tous les temples sont construits selon ce système de surplombs : ce qu'on pense être une voûte est en fait un surplomb dont les pierres ont été taillés pour donner l'illusion de voûte. On peut ainsi se demander si la civilisation Khmer connaissait toutes les propriétés des surplombs...
Dans notre société où tout ce qu'on fait ou apprend doit avoir une application immédiate, y compris la recherche scientifique, l'exposé des élèves sur les surplombs permet de montrer qu'on peut faire de la recherche sans aucune motivation utilitariste... Ce n'est que plus tard, au détour d'une visite, que l'on peut s'apercevoir que telle ou telle application est possible. Mais d'une façon générale, même sans aucune retombée technico-économique, l'essentiel est ailleurs : on aura travaillé pour « *l'honneur de l'esprit humain* » comme l'a si bien dit le mathématicien Carl Gustav Jacobi (1804 – 1851).]