

Le jeu de ping.

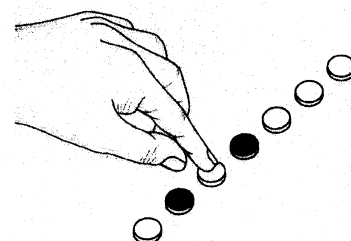
Atelier Math en jean's 2002/2003

Par AMOROS Benoît, BLANC Frédéric, LOMBRAD Nicolas et PANCIOLI Fabrice
du lycée d'Altitude de Briançon.

Enseignants: Hubert PROAL et Anne-Marie IMBERT
[les phrases entre crochées sont de l'enseignant]



Nous allons vous présenter le *jeu de ping* : nous avons des pions noirs d'un côté et blancs de l'autre. On part avec un alignement de n pions noirs qu'il faut arriver à tous retourner avec la règle suivante : quand on pointe un pion, on retourne ses voisins.



○ **Jouons** ○

● **Exemple 1** ●

Départ :

①	②	③	④	⑤
---	---	---	---	---

On pointe le ① on obtient :

①	②	③	④	⑤
---	---	---	---	---

On pointe le ② on obtient :

①	②	③	④	⑤
---	---	---	---	---

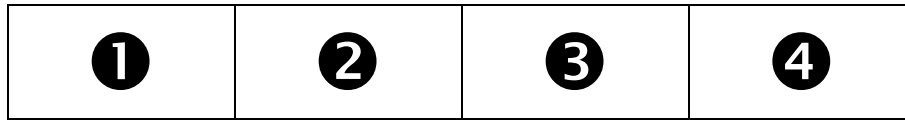
On pointe le ⑤ on obtient :

①	②	③	④	⑤
---	---	---	---	---

Perdu.

○ **Exemple 2** ○

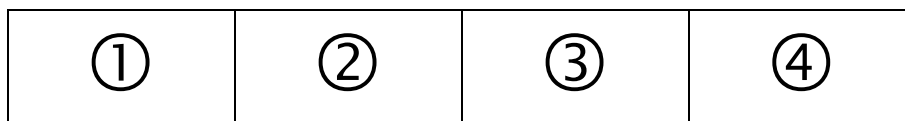
Départ :



On pointe le **2** on obtient :



On pointe le **3** on obtient :



Gagné.

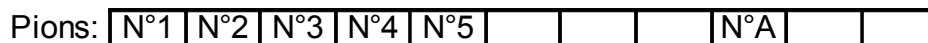
Nous avons commencé par jouer et avons constaté qu'avec un certain nombre de pions le jeu était impossible (par exemple avec 1 pion, 5 pions, 9 pions, 13 pions ...)

Il y a une certaine régularité dans ces cas d'impossibilité. Ils sont tous de la forme $1+4n$ (avec n entier naturel).

Nous allons prouver que seul ces cas ne marchent pas.

● **Théorie** ●

Notre première étape de recherche fut de prouver que l'ordre dans lequel on sélectionne les pions n'a aucune importance pour cela on va montrer qu'il est inutile de sélectionner deux fois un même pion .

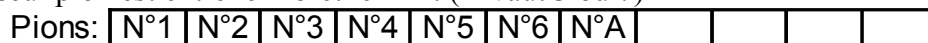


Plusieurs cas sont possibles :

Si au moins deux pions sont entre le $n^{\circ}5$ et le $n^{\circ}A$.

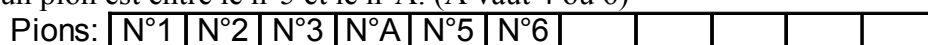
Quand on pointe A on ne retourne pas des pions voisins de 5. Donc dans ce cas jouer A puis 5 revient au même que de jouer 5 puis A

Si un seul pion est entre le $n^{\circ}5$ et le $n^{\circ}A$. (A vaut 3 ou 7)



Quand on joue A puis 5 le pion du milieu revient à l'état initial. Et jouer 5 puis A revient à la même chose puisque le pion du milieu retombe aussi sur l'état initial. Donc jouer 5 puis A ou A puis 5 revient au même.

Si aucun pion est entre le $n^{\circ}5$ et le $n^{\circ}A$. (A vaut 4 ou 6)



Quand on joue A, le pion 5 et le pion voisin de A changent de couleur. Puis on joue 5, le pion A et l'autre pion voisin de 5 changent de couleur. Si on joue 5 puis A on aboutit à la même chose.

Propriété 1: Nous pouvons permuter le choix des pions A et 5.

Autrement dit, si on joue la suite de coups 345621A5 est identique à la suite de coups 3456215A

Si on applique cette propriété plusieurs fois, on obtient :
 $345621A5=3456215A=3456251A=3456521A=3455621A$

Propriété 2: Sélectionner deux fois un même pion ne fait rien changer.

$3455621A=34621A$

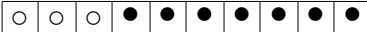
Propriété 3: (conséquence de la propriété 2 et 1) L'ordre dans lequel on sélectionne les pions n'a pas d'importance.

La deuxième étape de nos recherches, au vu des résultats précédents, a été d'étudier les suites de coups croissantes.

[L'ordre du choix des pièces n'ayant pas d'importance, autant regarder le cas où l'on joue en choisissant les pièces de manière croissante]

Départs possibles: 


Pion n°1. 

Puis pion n°2 

ou pion n°3. 

Ce deuxième choix n'est pas bon, on n'arrivera pas à retourner le pion n°1.

Pion n°2. 

Puis le pion n°3 

ou le pion n°4. 

Ce deuxième choix n'est pas bon, on n'arrivera pas à retourner le pion n°2.

Pion n°3 (ou plus). 

On n'arrive pas à retourner le pion n°1.

Ainsi on aboutit aux coups suivants:

Deux départs possibles (choix de la pièce n°1 ou choix de la pièce n°2)

Choix 1	1	2	5	6	...
Choix 2	2	3	6	7	...

