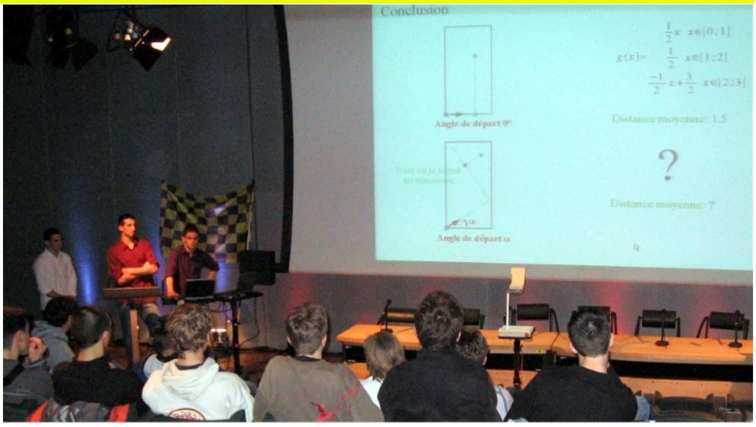
Optimisation de la recherche en avalanche

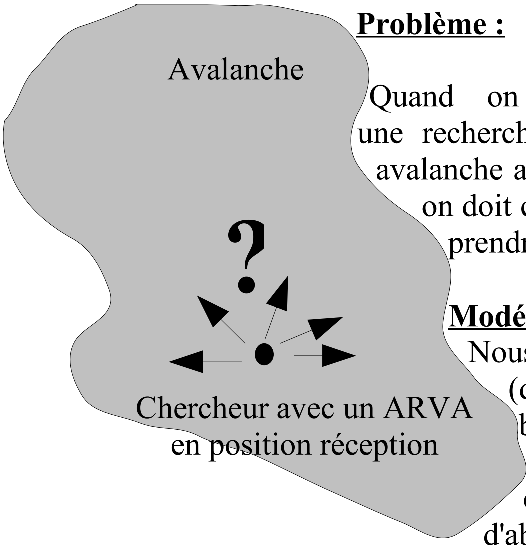
Par JOBARD Clément, CONDEMINE Florian et AMOROS Benoît, élèves de terminale S et ES au lycée d'Altitude de Briançon.

Suite au congrès « MATh.en.JEANS » 2004/2005, nous avons décidé de reprendre nos travaux portant sur la recherche de victimes en avalanches en haute montagne.



Exposé en amphi lors du congrès

à la Cité des Sciences et de l'Industrie.

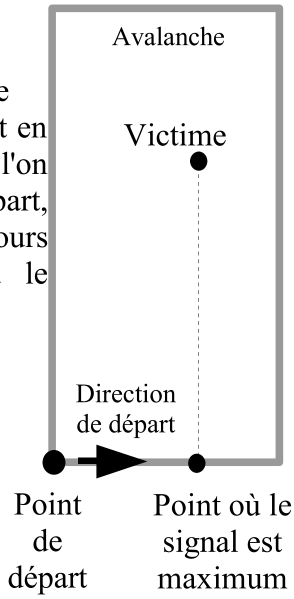


Problème :

Quand on fait une recherche en avalanche avec un ARVA (appareil de recherche des victimes d'avalanche), on doit choisir une direction de départ. Quelle est la meilleure direction à prendre ?

Modélisation :

Nous avons repris la schématisation en rectangle (de taille 1 sur 2). On part toujours du point en bas à gauche. Nous étudions ici le cas où l'on prend l'angle nul comme direction de départ, c'est-à-dire que l'on se déplacera toujours d'abord horizontalement jusqu'au point où le signal est maximum.



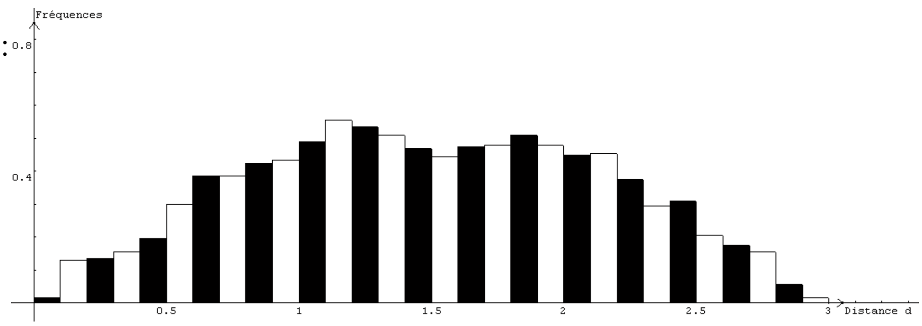
Ensuite on se déplace verticalement jusqu'à la victime.
On note *d* la distance ainsi parcourue.

Notre problème est de trouver la distance *d* parcourue en moyenne.

Simulations :

À l'aide d'un logiciel de géométrie (Géoplan), nous avons simulé plusieurs recherches de victimes selon le modèle précédent. On demande plein de fois à Géoplan de nous donner au hasard un point (x,y) du rectangle de côtés 1 x 2 (la distance *d* peut donc varier de 0 à 3). Dans les histogrammes ci-après, la fréquence d'apparition des distances est en ordonnée et nous avons mis en abscisse la distance parcourue (en regroupant par tranches).

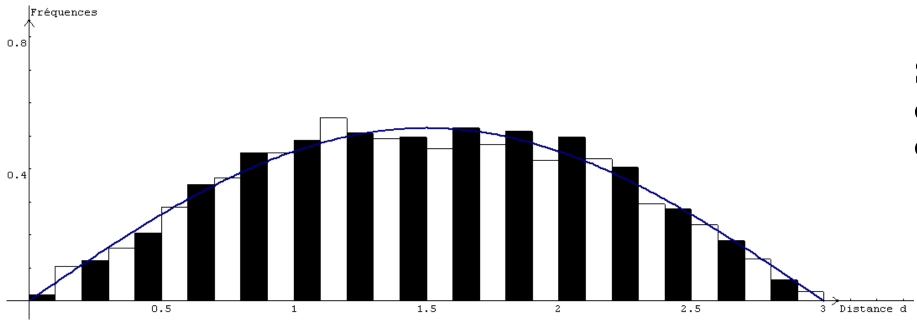
Simulation pour 2000 recherches :



Conjectures :

Le premier histogramme que nous avons obtenu nous a fait penser à une fonction sinus (que nous nommerons « *f* »).

Il faut que $f(0)=0$, $f(3)=0$ ainsi $f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ De plus, il faut que l'aire sous la courbe de *f* fasse 1 autrement dit $\int_0^3 f(x)\,dx=1$ ce qui nous donne $a=\frac{\pi}{6}$ En conclusion, on propose comme fonction densité la fonction $\boldsymbol{f(x)=\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)}$.



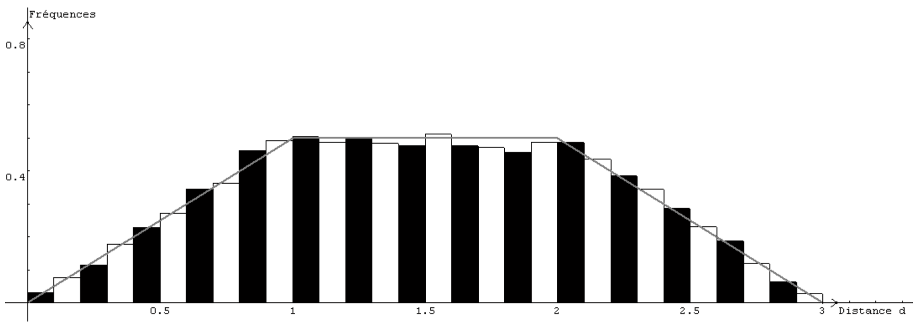
Simulation de 5001 recherches : cela ressemble à une courbe sinus ?

Au bout de plusieurs milliers de simulations, nous nous apercevons que la courbe s'aplatit de plus en plus, ce qui enlève donc la possibilité que la fonction que nous recherchons soit la fonction sinus (courbe sur le schéma ci-contre).
Nous avons donc décidé de refaire une conjecture en optant pour des fonctions affines par morceaux.
Nous aurons une courbe symétrique composée de trois fonctions affines. Il faut que la surface sous la courbe fasse 1, on conjecture ainsi la fonction

$g(x)=\frac{1}{2}x$ pour $x\in[0;1]$

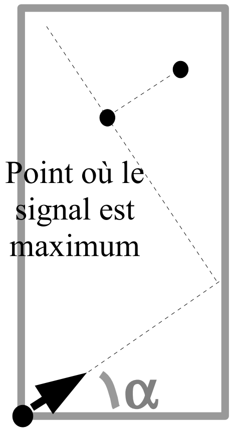
$g(x)=\frac{1}{2}$ pour $x\in[1;2]$ et

$g(x)=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}$ si $x\in[2;3]$



Simulation de 10 000 recherches. Finalement, la courbe ressemble plutôt à 3 segments !

Distance moyenne : 1,49



Angle de départ α

Conclusion :

Pour un angle de départ de 0° on a une distance moyenne de 1,5, mais qu'en est-il pour un autre angle de départ α et surtout quel angle va donner la plus petite distance moyenne ? Ce travail sera peut-être poursuivi l'année prochaine dans l'atelier MATh.en.JEANS du lycée d'Altitude.

[Commentaire d'un mathématicien relecteur : bravo, les élèves ont bien conjecturé la bonne courbe ! Sauront-ils l'expliquer l'an prochain ? ☺]