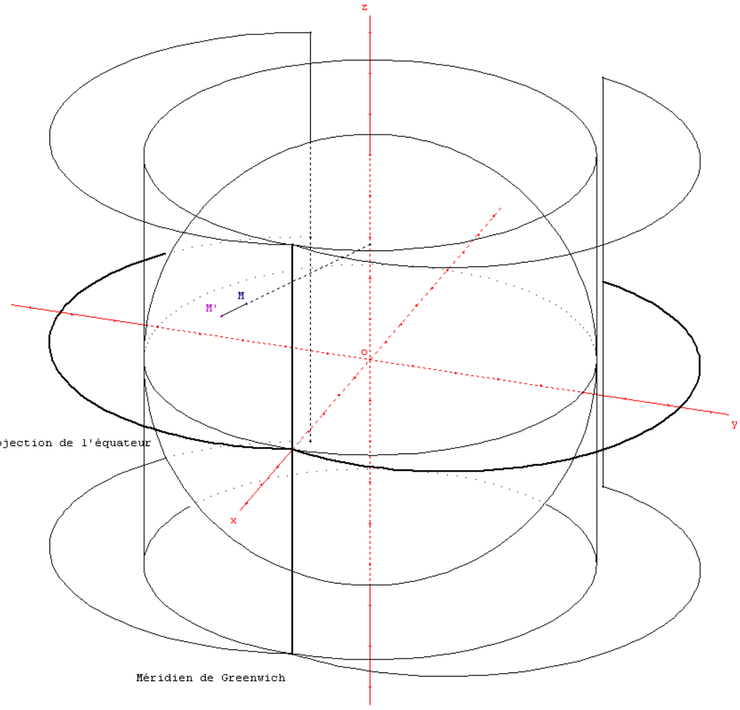
Limite jour/nuit du globe sur une carte

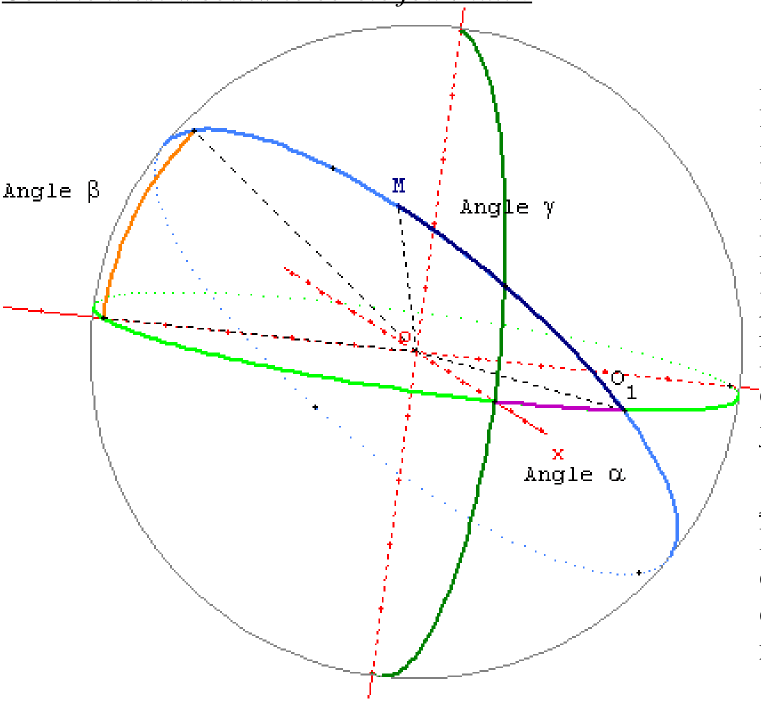
Par Chloé VIOLIN & Fanny ALBERTI,
élèves de terminale S du Lycée d'Altitude de Briançon.



Sujet de recherche :
Déterminer l'équation de la courbe qui sépare le jour de la nuit sur une carte plane de la Terre.

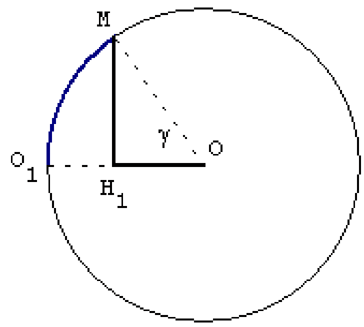
Système de projection :
Un point M de la sphère est projeté sur le cylindre en traçant la droite perpendiculaire à l'axe Oz passant par M. Le cylindre est ensuite « ouvert ».
Posons le méridien de Greenwich comme axe des ordonnées et l'équateur pour abscisse, ce qui permet de définir notre plan.

Comment est « codé» le cercle jour/nuit :

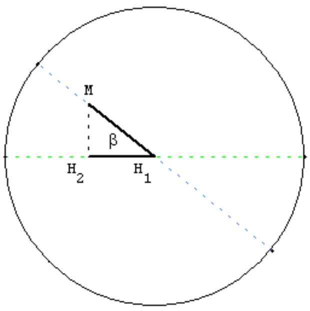


L'angle α (entre $-\pi/2$ et $\pi/2$) correspond à l'écart entre le centre de la carte et l'intersection du cercle jour/nuit avec l'équateur. Angle xoO_1
L'angle β (entre $-\pi/2$ et $\pi/2$) correspond à l'angle entre le cercle jour/nuit et l'équateur (le plan xoy).
L'angle γ (entre $-\pi$ et π) correspond à l'écart entre le point M et l'intersection du cercle jour/nuit avec l'équateur. Angle O_1oM

Recherche de l'ordonnée :
La « hauteur » du point M sur la sphère correspond à l'ordonnée du point M' sur la carte (car on projette selon un plan parallèle à xoy)

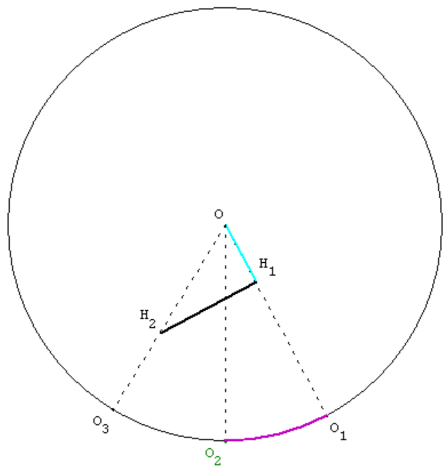


Dans le plan cercle jour/nuit :
$$H_1M = R\sin(\gamma)$$
Dans le plan perpendiculaire à l'équateur et au cercle jour/nuit et passant par H_1 :
$$H_2M = H_1M\sin(\beta) = R\sin(\gamma)\sin(\beta)$$



Observation : on notera que dans la réalité, le cercle jour/nuit ne peut occuper toutes les positions mathématiquement possible sur le globe : l'angle β ne décrit pas tout l'intervalle $[0 ; \pi/2]$.

<u>Recherche de l'abscisse :</u>



On reprend les deux vues précédentes $H_1M = R\sin(\gamma)$ et $H_1O = R\cos(\gamma)$
$H_1H_2 = H_1M\cos(\beta) = R\sin(\gamma)\cos(\beta)$ maintenant avec une vue du plan xoy ci-contre.

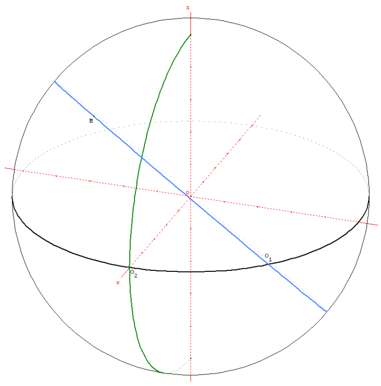
L'angle $\widehat{O_1OO_3} = \tan^{-1}\left(\dfrac{H_1H_2}{OH_1}\right)$

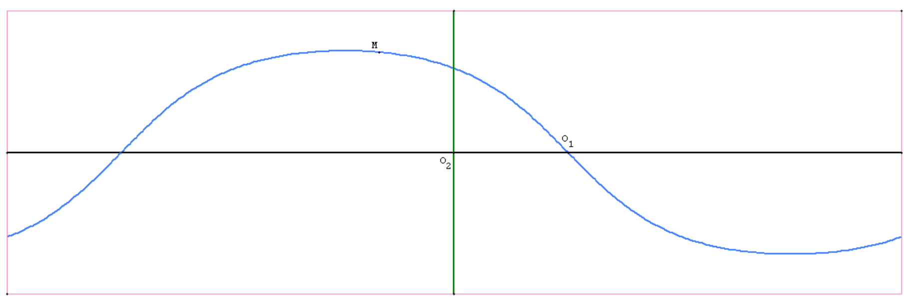
et ainsi l'abscisse est $R(\alpha - \tan^{-1}[\tan(\gamma)\cos(\beta)])$

Finies les tortures trigonométriques.

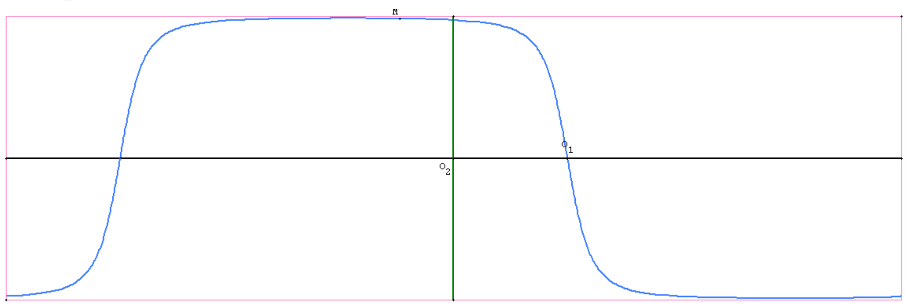
<u>Traçons la courbe paramétrée :</u>

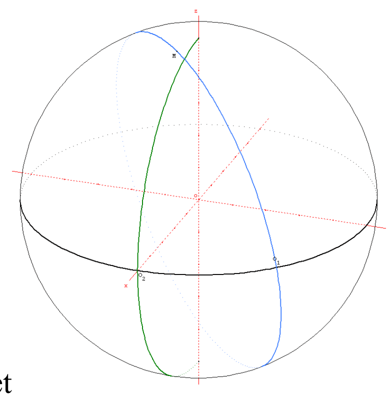
R est fixé ainsi que α et β qui correspondent à la position du cercle jour/nuit. Seul γ correspond au paramètre. $x(\gamma) = R(\alpha - \tan^{-1}[\tan(\gamma)\cos(\beta)])$ et $y(\gamma) = R\sin(\gamma)\sin(\beta)$



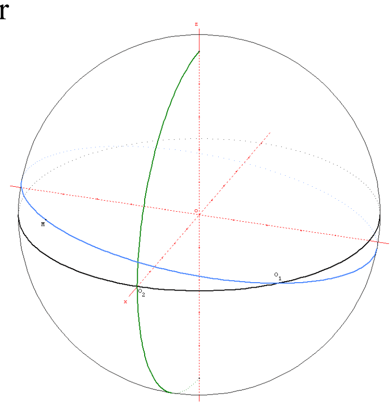


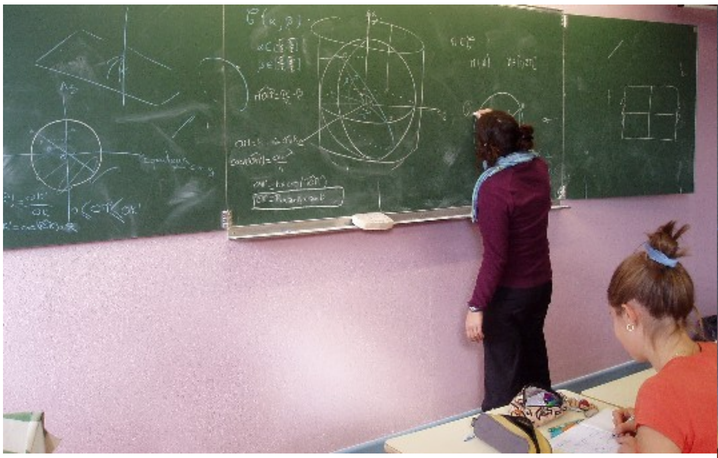
<u>Quelques cas :</u>

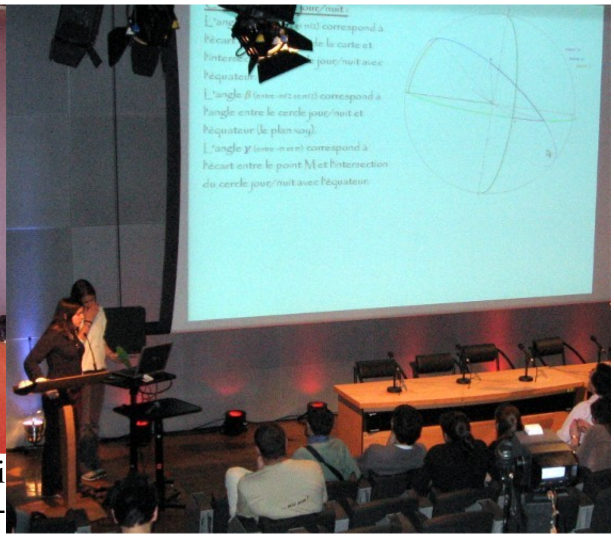




Quand β est proche de $\dfrac{\pi}{2}$ le cercle jour/nuit est proche d'un méridien et sur la carte on est proche de deux traits verticaux. Et inversement, quand β est proche de 0, le cercle jour/nuit est proche de l'équateur, et sur la carte on est proche de l'équateur aussi.







Les élèves ont une phase de recherche (ci-dessus) qui dure toute l'année et qui aboutit à l'exposé oral (ci-contre).