Les embouteillages

Par Jérôme RICHARD, Gwenael RIVAUX et Marien LAHAY, élèves de terminale S-si du lycée d'Altitude de Briançon.

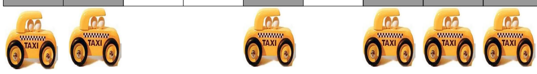
Afin de simplifier le problème des embouteillages, on détermine certaines conditions initiales.

Conditions initiales :

- une seule file de voiture
- les voitures sont de même gabarit
- deux positions possibles : arrêt ou marche
- toutes les voitures ont la même vitesse

On modélise donc le problème sous forme de tableau où chaque ligne est un temps T différent et chaque colonne est une position différente. Une case grise représente un véhicule et une case blanche un espace vide.

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7	N+8	N+9
T=0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0



La règle locale nous donne le fonctionnement suivant :
- une voiture avance quand l'espace juste devant elle est vide.
- une voiture reste sur place quand l'espace juste devant elle est occupé.

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7	N+8	N+9	N+10	N+11
T=1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
T=2	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0

Résolution d'un bouchon de *n* voitures :

On dit qu'un bouchon est *résorbé* (ou résolu) quand chaque voiture a un espace libre devant elle.
On étudie la résolution d'un bouchon comportant une suite de *n* voitures.

On note les *n* voitures 1^n

T=0	1	1	....	1	1	0	0

On obtient la résolution suivante :

	T	Exemple avec *n*=6											
À T=0 => 1^n	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
À T=1 => $1^{n-1}01$	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
À T=2 => $1^{n-2}0101$	2	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
	3	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
À T=*k* => $1^{n-k}(01)^k$	4	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
	5	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
À T=*n* => $(01)^n$	6	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Perspectives :

On pourrait améliorer notre modèle en y ajoutant :
-plusieurs files de voitures.
-des vitesses différentes.
-des véhicules de différents gabarits.
Ce module simplifié peut devenir sujet de grandes réflexions.

Théorème :
Un bouchon de *n* voitures se résorbe au bout d'un temps T égal à *n*.

Présentation à la Cité des Sciences

Présentation à l'Université de Luminy
dans le cadre du projet Hippocampe maths.

Discussion avec leur enseignant de maths

Résolution de deux bouchons de n_1 et n_2 voitures séparées par p espaces vides :

On étudie l'évolution dans le temps de deux bouchons de n_1 et n_2 voitures séparées par p espaces vides.
Plusieurs cas possibles :

Si $n_1<p<n_2$

On obtient l'évolution suivante :

À T=0 => $1^{n_1}0^p1^{n_2}$

À T=1 => $1^{n_1-1}0\,1\,0^{p-1}1^{n_2-1}0\,1$

À T=2 => $1^{(n_1-2)}(01)^2 0^{p-2}1^{n_2-2}(01)^2$

À T=n_1 => $(01)^{n_1}0^{p-n_1}1^{n_2-n_1}(01)^{n_1}$

Le premier bouchon est résorbé, le deuxième bouchon a n_2-n_1 voitures.

À T=p => $(01)^{n_1}1^{n_2-p}(01)^p$

Les voitures du premier bouchon ont rattrapé le deuxième bouchon. Ce qui crée un bouchon de n_2-p+1 voitures qui est alimenté pendant n_1-1 temps.

À T=p+n_1 => $1^{n_2-p}(01)^{p+n_1}$

On retrouve un bouchon « simple » de n_2-p voitures.

Exemple avec n_1=4, p=6 et n_2=8

	T																			
	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
	2	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
	3	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
n_1	4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
	5	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
p	6	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
	7	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	8	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	9	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
n_1+p	10	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Si $p<n_1<n_2$

On obtient l'évolution suivante :

À T=0 => $1^{n_1}0^p1^{n_2}$

À T=1 => $1^{n_1-1}0\,1\,0^{p-1}1^{n_2-1}0\,1$

À T=2 => $1^{(n_1-2)}(01)^2 0^{p-2}1^{n_2-2}(01)^2$

À T=p => $1^{n_1-p}(01)^p1^{n_2-p}(01)^p$

Le deuxième bouchon est maintenant de n_2-p+1. Il va être alimenté de manière régulière par le premier bouchon. Physiquement le deuxième bouchon va se rapprocher du premier.

À T=n_1 => $(01)^{n_1}1^{n_2-p}(01)^{n_1}$

Il reste un seul bouchon de n_2-p+1 voitures qui est alimenté pendant n_1-1 temps.

À T=p+n_1 => $1^{n_2-p}(01)^{p+n_1}$

On retrouve un bouchon « simple » de n_2-p voitures.

Exemple avec p=4, n_1=6 et n_2=8

	T																			
	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
	2	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
	3	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
p	4	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0
	5	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
n_1	6	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
	7	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	8	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	9	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
n_1+p	10	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	11	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	12	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Si $n_1>p>n_2$.

On obtient l'évolution suivante : Le deuxième bouchon se résorbe et n'est pas alimenté par les voitures du premier bouchon (car $p>n_2$). Finalement au temps n_1, le plus gros bouchon est résorbé.

Si $n_1>n_2>p$.

On est très proche du cas $n_1<p<n_2$.
À T=p Les voitures du premier bouchon ont rattrapé le deuxième bouchon. Ce dernier est alimenté régulièrement, donc ne change pas de taille.
À T=p+n_1 On retrouve un bouchon « simple » de n_2-p voitures.

Et enfin si $p>n_1>n_2$ ou $p>n_2>n_1$.

Les deux bouchons ne rentreront pas en « contact ». Le temps nécessaire est alors le maximum entre n_1 et n_2.

Finalement, on aboutit à deux théorèmes

Théorème :
Deux bouchons de n_1 et n_2 voitures séparées de p espaces vides ($p<n_2$) se résorbent à T=n_1+n_2.

Théorème :
Deux bouchons de n_1 et n_2 voitures séparées de p espaces vides ($p>n_2$) se résorbent à T=max(n_1;n_2).