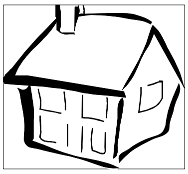
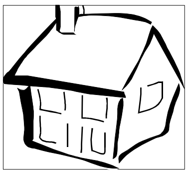
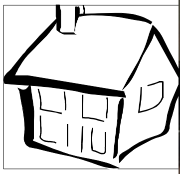
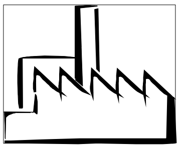
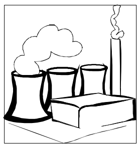
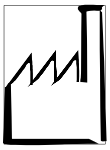
Problème des trois maisons et des trois usines

Par Lucie MILOCHE, Arnaud TOYE, Antoine PETRELLI, Maxence OLIVE, Thomas HEUSCH, Édouard DAVIN, Cyril FAVIER et Yann KERMAREC, élèves de terminale S-si au lycée d'Altitude de Briançon.

Explication du problème :

On a trois maisons et trois usines, il faut relier chacune des maisons à toutes les usines sans que les traits ne se croisent.

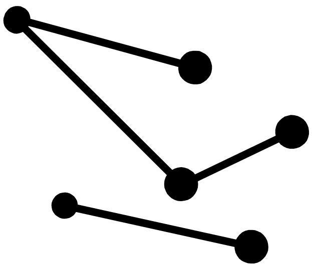
Étude de graphes :

Pour étudier ce problème, nous avons simplifié en utilisant des graphes, c'est-à-dire, en représentant les maisons et les usines par des points. Ensuite, nous avons étudié des graphes beaucoup plus simples.

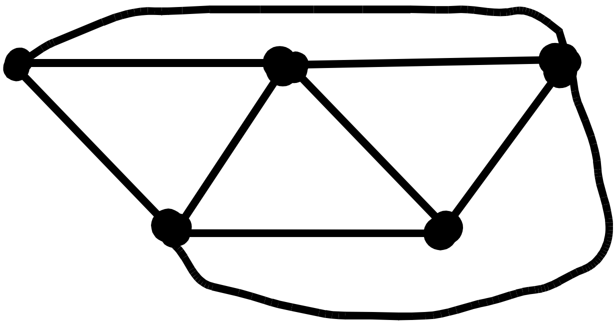
Définition : La reliabilité est la capacité de relier un ensemble de points en respectant le non-croisement. [Commentaire d'un chercheur : les mathématiciens disent que le graphe est « planaire », c'est-à-dire qu'il peut être dessiné dans le plan sans croisement des traits, nous avons gardé ci-dessus la terminologie créée par les élèves. ☺]

On cherche une propriété des graphes reliables pour prouver que notre problème ne l'est pas. Sur un graphe, nous avons :

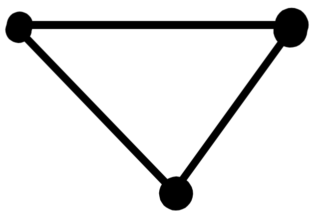
P : nombre de points [les « sommets »]
T : nombre de traits entre les points [les « arêtes »]
M : nombre de morceaux (ensemble de points reliés entre eux) [les parties « connexes »]
S : nombre de surfaces délimitée par des arêtes [les « faces »] (la surface extérieure est comptée)



P=6, T=4, M=2 et S=1



P=5, T=9, M=1 et S=6

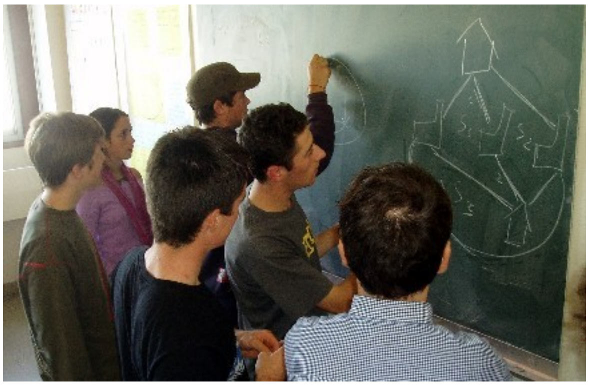


P=3, T=3, M=1 et S=2

Exemples :
Après l'étude de nombreux graphes simples, on a conjecturé une première formule

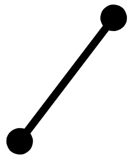
S=T-P+M+1

Nous démontrons cette égalité par récurrence sur T.



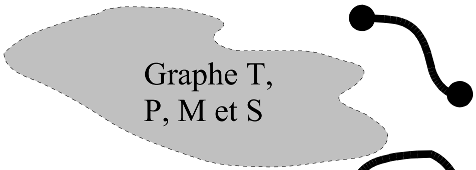
Discussion avec un chercheur à Luminy dans le cadre du projet Hippocampe maths

<u>Au rang de départ</u>
Lorsque : T = 1 alors M=1 et P=2
Nous avons T-P+M+1=1-2+1+1=1 et S=1
Ainsi l'égalité est vraie pour ces conditions.

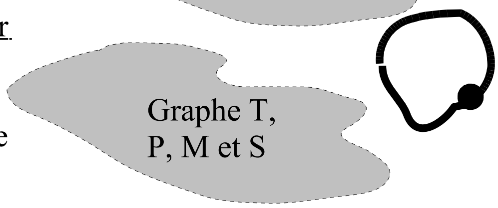


<u>Passage de T à T+1</u>
On suppose qu'il existe un T tel que : S=T-P+M+1.
Si on rajoute un trait, il y a plusieurs cas possibles :

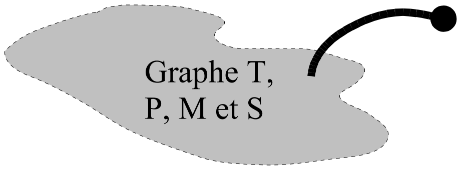
<u>Le nouveau trait n'est pas relié au reste du graphe :</u>
On a alors T+1 traits, P+2 points (les deux nouveaux points extrémités du trait), M+1 morceaux et S surfaces (le nouveau trait n'a pas créé une surface)
Notre nouveau calcul est (T+1)-(P+2)+(M+1)+1=T-P+M+1=S (par hypothèse de récurrence)



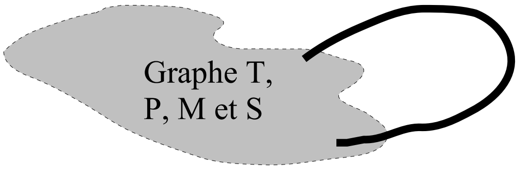
<u>Le nouveau trait n'est pas relié au reste du graphe et se boucle sur lui même :</u>
On a alors T+1 traits, P+1 points, M+1 morceaux et S+1 surfaces
Le calcul (T+1)-(P+1)+(M+1)+1=T-P+M+1+1=S+1 (par hypothèse de récurrence)



<u>Le trait est relié au reste du graphe par un point :</u>
On a alors T+1 traits, P+1 points, M morceaux et S surfaces.
La formule marche encore



<u>Et enfin, le trait est relié au reste du graphe aux 2 extrémités :</u>
On a alors T+1 traits, P points, M morceaux et S+1 surfaces.
Et là aussi, on retrouve que le nombre de traits moins le nombre de points plus le nombre de morceaux plus 1 donne le nombre de surfaces.



Ainsi, S=T-P+M+1 est vraie pour tout T.

Présentation à la MJC de Briançon lors de la Fête de la Science.

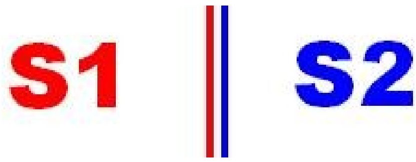
Présentation sur stand à la

Cité des Sciences.

Démonstration que le problème des 3 usines et des 3 maisons n'est pas réalisable.

Chacune des trois maisons étant reliée à trois usines, il faut 9 traits pour réaliser le graphe. Chaque surface est délimitée par au moins quatre traits, en effet, si une surface est délimitée par 3 traits, c'est qu'une usine est reliée à une autre usine ou qu'une maison est reliée à une autre maison. Or, nous voulons relier une maison à une usine.

Sachant que chaque trait est encadré par deux surfaces, nous assimilons donc les arêtes à des ½ arêtes, chaque ½ arête appartenant respectivement à la surface avec laquelle elle est associée.



On dédouble toutes les arêtes.

Dans notre cas, on devrait avoir, avec 9 traits et des surfaces délimitées par au moins quatre traits, $\frac{9\times 2}{4}=4,5<5$ soit moins de 5 surfaces distinctes.
Or, avec la formule précédemment définie on obtient : S=T-P+M+1=9-6+1+1=5

Graphes dans l'espace :

Avec un trou dans le plan, le graphe des 3 maisons et des 3 usines est réalisable.

L'égalité définie précédemment (S=T-P+M+1) n'est donc pas valide dans l'espace.

Nous avons généralisé notre formule en lui soustrayant 2 fois le nombre de trous nécessaires pour que le graphe soit réalisable. Ce qui donne : S=T-P+M+1-2G avec G : le nombre de trous.
[Commentaire du chercheur : les mathématiciens appellent G le « genre » du graphe. Les élèves ont ainsi retrouvé la généralisation par Poincaré du théorème de Descartes-Euler: faces+sommets-arrêtes=2 pour n'importe quel polyèdre. ☺]

Après des recherches, nous avons trouvé une formule donnant le nombre de trous nécessaires pour réaliser un graphe avec *M* maisons et *U* usines.

Il faut que G soit égal à la partie entière supérieure de $\frac{(U-2)\times(M-2)}{12}$

Ainsi pour un graphe à 6 maisons et 6 usines, selon la formule, il faut deux trous pour sa réalisation dans l'espace. Il nous faudrait un double tore.

Présentation devant les chercheurs de l'Université de Luminy dans le cadre du projet Hippocampe maths.