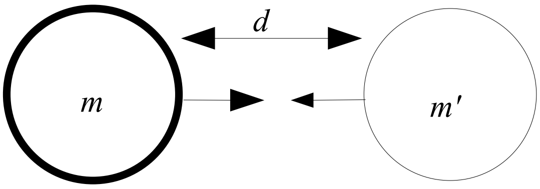
La loi de Newton

Par Nicolas KELLER, Arthur IMBERT et Bastien PENARD, élèves de première S et première GE du lycée d'Altitude de Briançon.

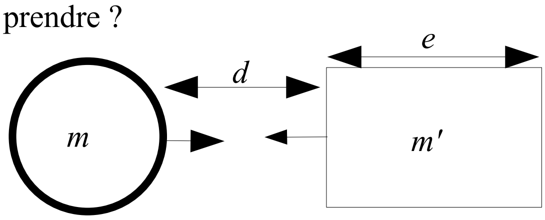
Quand nous avons deux planètes sphériques de masse m et m' séparées par une distance d, un théorème de mécanique, utilisé ici comme hypothèse de travail, nous dit que la force d'attraction est alors égale à $F=\frac{mm'}{d^2}$



Remarque : si la distance d est grande, la force est petite et si d est petit, la force est grande.

Notre problème est le suivant :

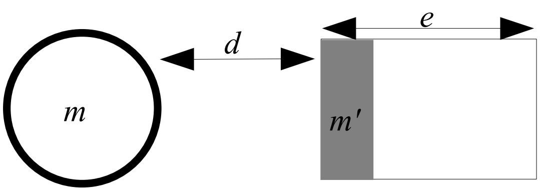
Que se passe-t-il quand l'une des planètes n'est pas sphérique mais cylindrique ? Quelle distance prendre ?



À défaut de trouver une formule, nous avons cherché un encadrement de la force. Pour les calculs, nous adoptons l'hypothèse suivante : *une tranche cylindrique très fine se comporte comme une planète sphérique de même masse et située à la même distance.*

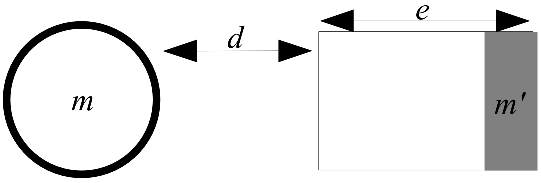
LE MAJORANT

Pour majorer la force, on peut imaginer que toute la masse de la planète cylindrique est proche de l'autre planète. Ainsi la « distance » entre les deux masses sera minimale et la force maximale (d'après notre remarque ci-dessus) $F\leq\frac{mm'}{d^2}$



LE MINORANT

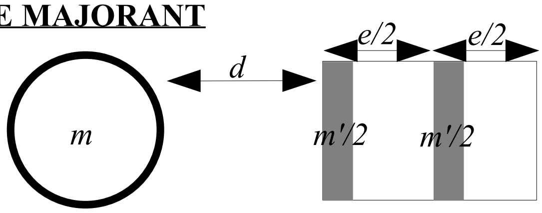
Pour ensuite calculer le minorant, il faut imaginer que la masse de la planète cylindrique est répartie de façon inverse, c'est-à-dire le plus loin possible de m : $\frac{mm'}{(d+e)^2}\leq F$.



L'encadrement est : $\frac{mm'}{(d+e)^2}\leq F\leq\frac{mm'}{d^2}$.

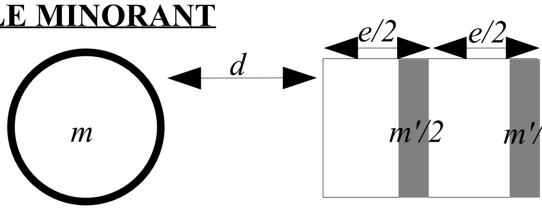
Après plusieurs séances de recherche et avec l'aide de notre enseignant, nous avons décidé de couper la planète cylindrique en deux parties égales et d'appliquer le même procédé à chaque partie.

LE MAJORANT



$$F \leq \frac{\frac{mm'}{2}}{d^2} + \frac{\frac{mm'}{2}}{(d+\frac{e}{2})^2}$$

LE MINORANT



$$\frac{\frac{mm'}{2}}{(d+\frac{e}{2})^2} + \frac{\frac{mm'}{2}}{(d+e)^2} \leq F$$

Dans ce cas, l'encadrement est donc : $\dfrac{\frac{mm'}{2}}{(d+\frac{e}{2})^2} + \dfrac{\frac{mm'}{2}}{(d+e)^2} \leq F \leq \dfrac{\frac{mm'}{2}}{d^2} + \dfrac{\frac{mm'}{2}}{(d+\frac{e}{2})^2}$.

Ce dernier encadrement est meilleur que le premier.

En effet pour $\dfrac{mm'}{(d+e)^2} \leq F \leq \dfrac{mm'}{d^2}$, la différence fait

$\dfrac{mm'}{d^2} - \dfrac{mm'}{(d+e)^2}$ et pour

$\dfrac{\frac{mm'}{2}}{(d+\frac{e}{2})^2} + \dfrac{\frac{mm'}{2}}{(d+e)^2} \leq F \leq \dfrac{\frac{mm'}{2}}{d^2} + \dfrac{\frac{mm'}{2}}{(d+\frac{e}{2})^2}$ elle est de

$$\frac{\frac{mm'}{2}}{d^2} + \frac{\frac{mm'}{2}}{(d+\frac{e}{2})^2} - \frac{\frac{mm'}{2}}{(d+\frac{e}{2})^2} - \frac{\frac{mm'}{2}}{(d+e)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{mm'}{d^2} - \frac{mm'}{(d+e)^2}\right)$$

On a réduit l'encadrement de moitié.

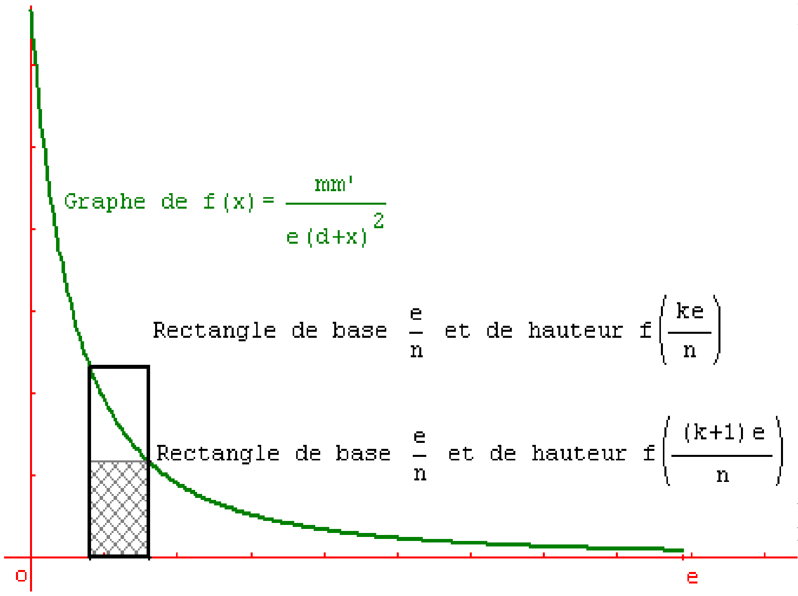
Si on découpe la planète en n morceaux égaux, on obtient l'encadrement :

$$\frac{\frac{mm'}{n}}{(d+\frac{e}{n})^2} + \frac{\frac{mm'}{n}}{(d+\frac{2e}{n})^2} + \cdots + \frac{\frac{mm'}{n}}{(d+\frac{ne}{n})^2} \leq F \leq \frac{\frac{mm'}{n}}{d^2} + \frac{\frac{mm'}{n}}{(d+\frac{e}{n})^2} + \frac{\frac{mm'}{n}}{(d+\frac{2e}{n})^2} + \cdots + \frac{\frac{mm'}{n}}{(d+\frac{(n-1)e}{n})^2}$$

[Notes de la rédaction - Comme on va le voir, l'encadrement trouvé est de plus en plus fin au fur et à mesure que n augmente : à la limite (n infini) la force F est parfaitement déterminée ; tel est le principe du *calcul intégral*.]

INTERPRÉTATION DE L'ENCADREMENT ET LIMITE QUAND *n* TEND VERS +∞.

On trace la fonction $f(x)=\frac{mm'}{e(x+d)^2}$



L'aire d'un rectangle noire est

$$\frac{e}{n}\times\frac{mm'}{e(d+\frac{ke}{n})^2}=\frac{\frac{mm'}{n}}{(d+\frac{ke}{n})^2}$$

et celle d'un rectangle quadrillé est

$$\frac{e}{n}\times\frac{mm'}{e(d+\frac{(k+1)e}{n})^2}=\frac{\frac{mm'}{n}}{(d+\frac{(k+1)e}{n})^2}$$

Ainsi quand k varie, la somme des aires des rectangles noirs donne le majorant (ci-dessus) et la somme des aires des rectangles quadrillés donne le minorant.

La force F est donc entre ces deux surfaces (somme des rectangles noirs et somme des rectangles quadrillés). Quand n devient très grand (à la limite), l'encadrement tend vers F, c'est-à-dire l'aire sous la courbe de la fonction f : $F=\int_0^e \frac{mm'}{e(d+x)^2}dx$.