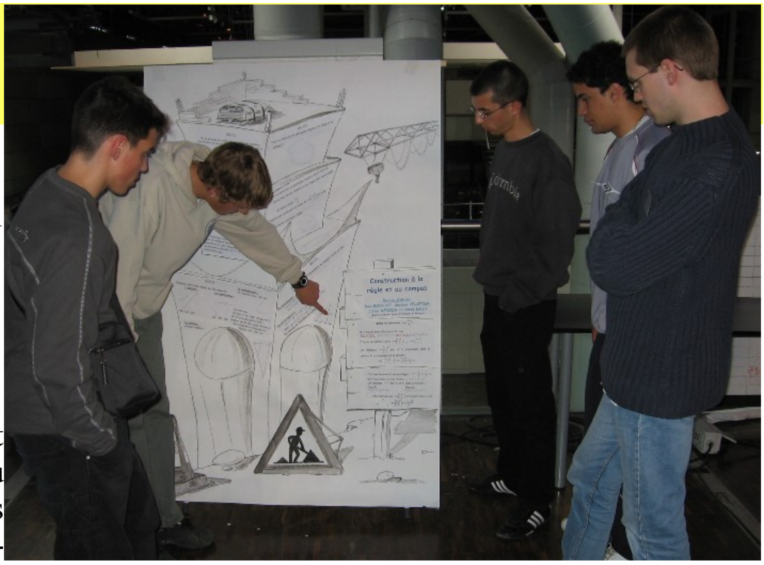
Construction à la règle et au compas

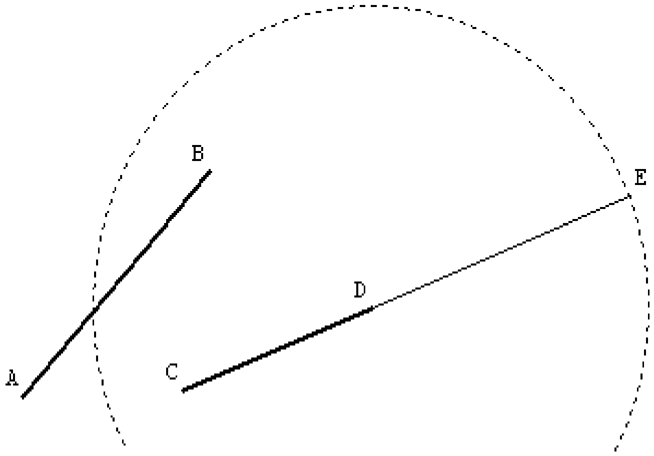


Bureau d'étude :
Max BONNIOT, Maxime PELLETIER, Julien MERCIER et Hervé GALLY
Maître d'oeuvre : lycée d'Altitude de Briançon

Défi n°1 :

On dispose de deux segments [AB] et [CD] et on souhaite construire (à la règle et au compas) des segments dont les longueurs correspondent aux opérations simples, c'est-à-dire addition, soustraction, multiplication et division.

L'addition :



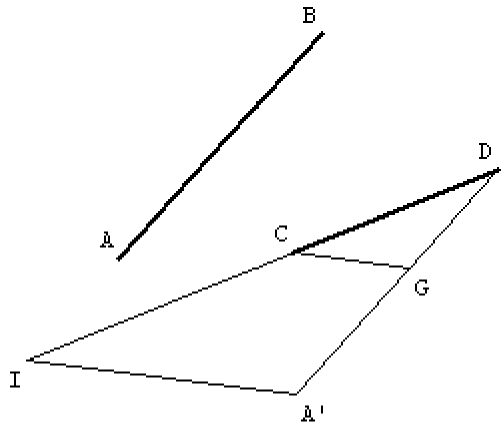
AB + CD = CE

La soustraction :

La démarche est similaire à l'addition.

La multiplication :

On souhaite faire $AB \times CD$



Construction :
On place A' tel que $A'D=AB$. On place G sur $[DA')$ tel que DG =1. On trace la parallèle à (CG) passant par A'. Elle coupe (DC) en I. Ainsi d'après le théorème de Thalès : $DI = DA' \times DC = AB \times DC$

La division :

À vous d'essayer !

Défi n°2 : Peut-on construire un segment de longueur racine carrée d'une longueur ?

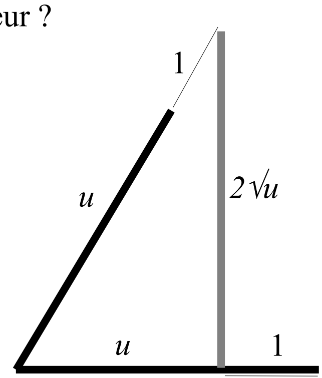
On remarque que : $(u+1)^2 = u^2 + 2u + 1$ $\quad (u-1)^2 = u^2 - 2u + 1$

Par différence on a : $(u+1)^2 - (u-1)^2 = (u^2 + 2u + 1) - (u^2 - 2u + 1) = 4u$

Ainsi $(u+1)^2 = (2\sqrt{u})^2 + (u-1)^2$

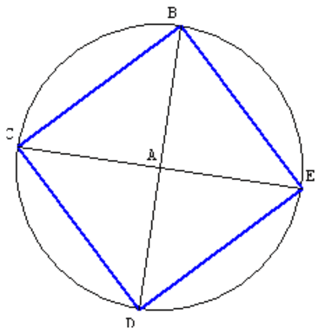
On retrouve le Théorème de Pythagore.

On peut donc construire un segment de longueur $\sqrt{u}$ (il faut avoir l'unité).

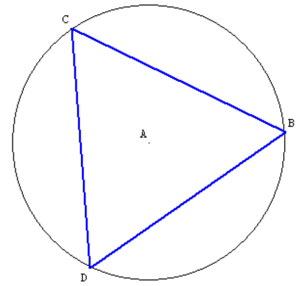


<u>Défi n°3 :</u>
On se propose de construire des polygones réguliers inscrits dans un cercle à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

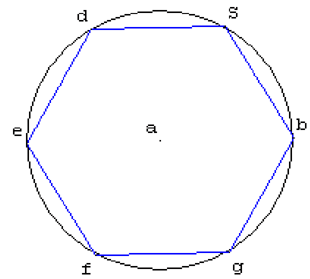
<u>Le carré :</u>



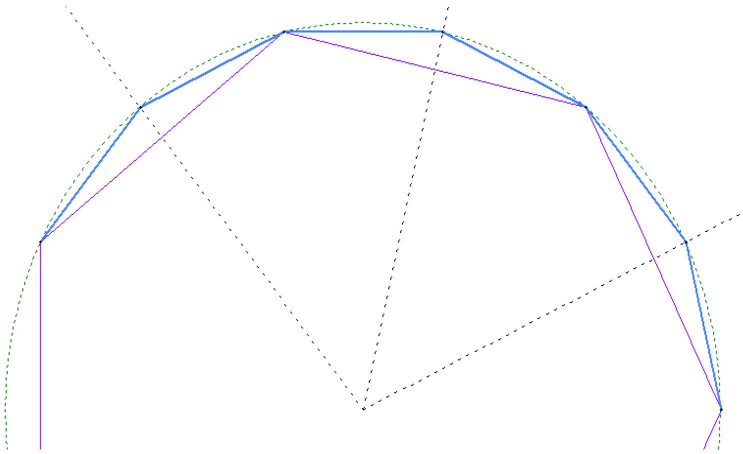
<u>Le triangle équilatéral :</u>



<u>L' hexagone régulier :</u>



Peut-on en faire d'autres ? Oui, grâce à nos deux théorèmes :



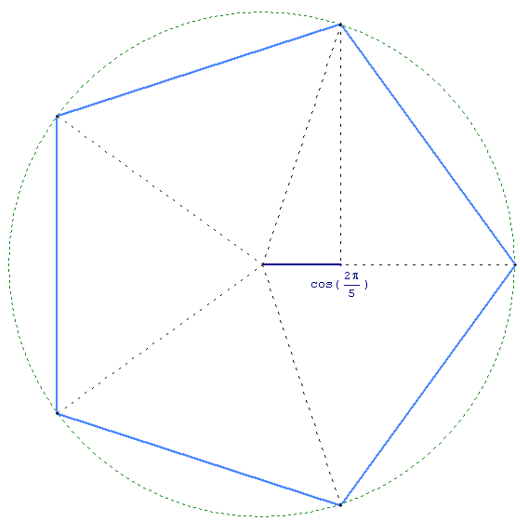
<u>Théorème 1 :</u>
Soit un polygone régulier A à *n* côtés, on peut construire un autre polygone régulier B à $2^p \times n$ côtés (avec *n* et *p* appartenant à $\mathbb{N}$) en prenant la médiatrice de chaque côté du polygone A *p* fois.

<u>Théorème 2 :(réciproque).</u>
Soit un polygone régulier à $2^p \times n$ côtés, on peut construire un autre polygone régulier à *n* côtés, en prenant un sommet sur 2^p et en les reliant entre eux.

[Commentaire du chercheur : le génial Gauss a prouvé à l'âge de 19 ans que l'ensemble des polygones constructibles à la règle et au compas ont 2^p x F_n x ... x F_m côtés, où on a un produit de nombres de Fermat (définis par $F_n = 1 + 2^{(2^n)}$) distincts et premiers. À ce jour, on ne connaît que cinq nombres de Fermat qui sont aussi des nombres premiers : les 5 premières valeurs F_0 =3, F_1 =5, F_2=17, F_3 =257 et F_4 =65537. On peut donc construire un 4x3x17-gone, mais pas un 7 ou un 9-gone. Les élèves vont maintenant nous montrer la plus petite construction non triviale! ☺]

<u>Défi n°3 bis:</u> Peut-on construire le pentagone régulier à la règle et au compas ?

Afin de construire un pentagone régulier inscrit dans un cercle, nous devons construire une figure dont les 5 angles au centre valent $\frac{2\pi}{5}$. On cherche par conséquent la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ qui nous permettra de construire l'angle.



Permis de construire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

On a trouvé deux relations telles que

<u>Relation 1.</u> $\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(4\frac{\pi}{5}\right)=\frac{-1}{2}$ <u>Relation 2.</u> $\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)\times\cos\left(4\frac{\pi}{5}\right)=\frac{-1}{4}$

D'après la relation 1, on a :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1}{2}-\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

On remplace $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ par cette expression dans la relation 2 et on obtient :

$$-\cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\frac{1}{4}=0$$

On a une équation du second degré telle que $-X^2-\frac{1}{2}X+\frac{1}{4}=0$

Discussion avec un chercheur de Luminy dans le cadre du projet Hippocampe maths.

On trouve deux racines réelles : $X_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $X_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Laquelle est notre cosinus ?

On remplace $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ par X_1 et X_2 dans la relation 1.

<u>Pour X_1 :</u>

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1}{2}-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}<0$$

<u>Pour X_2 :</u>

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1}{2}-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}>0$$

On remarque que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est positif donc c'est $\boldsymbol{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

En conclusion, il est possible de construire un pentagone régulier à la règle et au compas !

Rencontre avec des chercheurs de l'Institut de Mathématiques de Luminy

et débat sur leur métier de chercheur en mathématiques dans le cadre du projet Hippocampe maths.