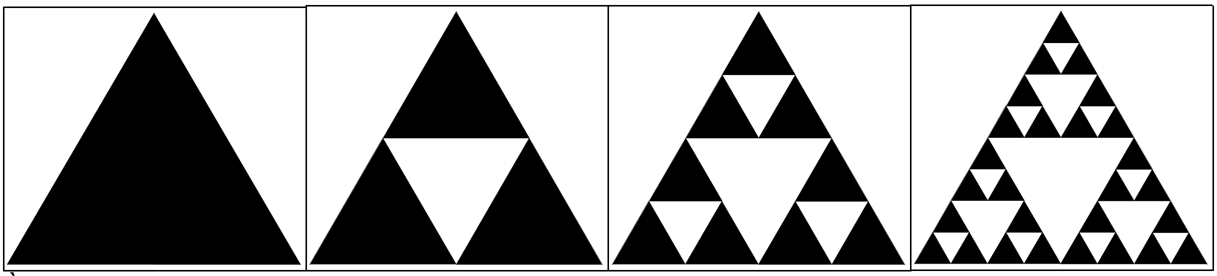
Le triangle de Sierpinski

Par Julien DASILVA, Maël LE GALL, Christophe LONCHAMPT, Marie ROLLAND et Élodie GRIALOU,
élèves de seconde du lycée d'Altitude de Briançon.

Construction du triangle de Sierpinski

On part d'un triangle équilatéral ABC.
On construit le triangle dont les sommets sont les milieux des côtés de ABC.
Ce dernier triangle est retiré de la figure.

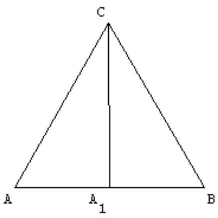


À chaque nouveau triangle gris, on applique le même procédé, c'est-à-dire qu'on enlève le triangle construit avec les milieux des côtés.

Étude du triangle de Sierpinski

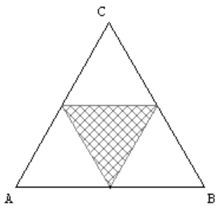
On cherche la surface du triangle de Sierpinski.

Niveau de départ :



Surface : $S_0 = \frac{16 \times \sqrt{192}}{2}$ en effet ABC est équilatéral (de côté 16), la hauteur est aussi la médiane. Ainsi $CA_1 = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{192}$

Niveau un :



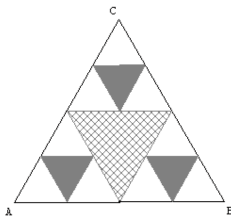
L'aire du triangle que l'on enlève (hachuré), est égale au quart de la surface du triangle de départ.

Surface du triangle que l'on enlève : $\frac{S_0}{4}$

L'aire restante est égale au $\frac{3}{4}$ du triangle de départ.

L'aire restante est : $\frac{3}{4} S_0$

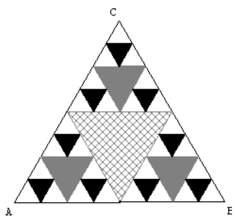
Niveau deux :



L'aire d'un triangle grisé, est égale au quart de l'aire du triangle hachuré, soit $\frac{\frac{S_0}{4}}{4} = \frac{S_0}{4^2}$

L'aire restante est égale à l'aire d'un triangle grisé multipliée par trois au carré, soit $\left(\frac{S_0}{4^2}\right) \times 3^2$

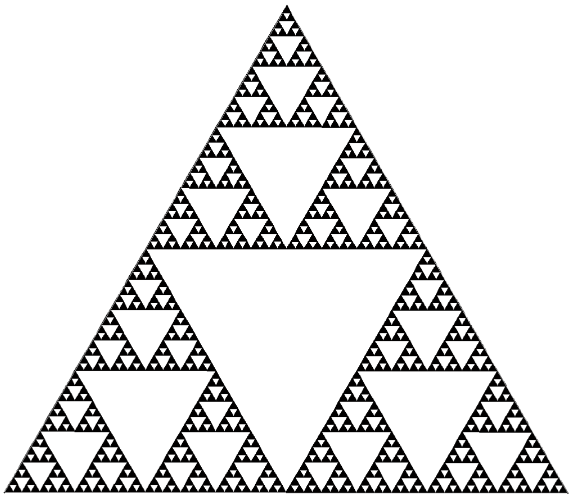
Niveau trois :



Le niveau 3 consiste à enlever encore de la matière. L'aire d'un triangle noir que nous allons enlever est : $\left(\frac{S_0}{4^3}\right)$

La matière restante du triangle sera : $\left(\frac{S_0}{4^3}\right) \times 3^3$

<u>Niveau *n* : (généralisation des résultats)</u>



Lorsque l'on enlève de la matière, au niveau de départ, nous avons la formule suivante $\frac{S_0}{4}$.

Et pour connaître la surface restante, nous utiliserons la formule : $\frac{S_0}{4} \times 3$

Dans les cas plus généraux et si l'on veut effectuer d'autres niveaux, nous utiliserons les puissances de 4 pour le diviseur,et les puissances de 3 pour la multiplication qui suit.

La matière restante est : $\frac{S_0}{4^n} \times 3^n$

Reste à voir quand *n* est grand,comment varie la surface. Pour cela il suffit de tracer la fonction $f(x) = S_0 \left(\frac{3}{4}\right)^x$ et on constate que l'aire tend vers zéro. Ainsi on peut dire que la surface du triangle de Sierpinski est nulle.