Caustique d'un cercle

par Alice Bossuet, Rémi Doumenc et Bastien Penard

Élèves de première et terminale GE
au Lycée d'Altitude de Briançon
Enseignants : Thibault Millet & Hubert Proal
Chercheur : Patrick Vérovic (*Université de Savoie*)

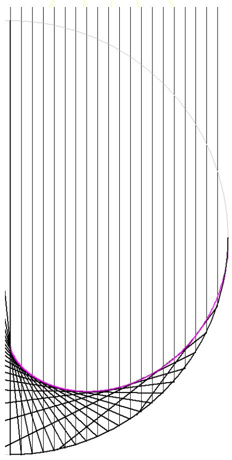
<u>La caustique</u> :

Avez-vous déjà observé que, lorsque la lumière arrive d'une certaine manière sur une tasse ou une prise électrique ronde, il se forme une ombre ayant une forme étrange, dont le bord est constitué de deux arcs de cercle avec une pointe au milieu ?...

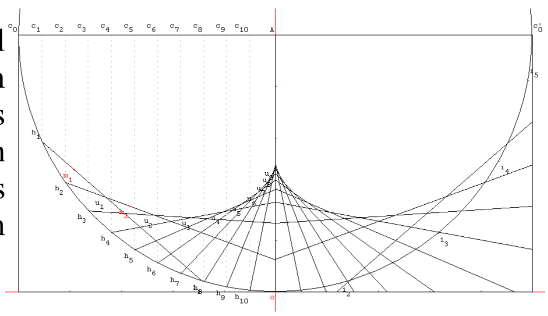
Notre problème a été cette année de déterminer l'équation cartésienne de la courbe qui représente ce bord faisant la séparation entre la zone d'ombre et la zone lumineuse, appelée « caustique ».

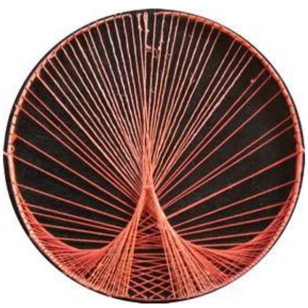
Il s'agit en fait de l'enveloppe des droites qui correspondent aux rayons lumineux réfléchis par la paroi circulaire de la tasse (ou de la prise électrique).

<u>Premier essai... infructueux</u> :



Dans un premier temps, grâce au logiciel libre GéoPlan, nous avons fait tracer par un ordinateur quelques-uns de ces rayons lumineux (incidents et réfléchis). En récupérant alors les coordonnées de quelques points, nous comptions en déduire l'équation de la courbe recherchée.





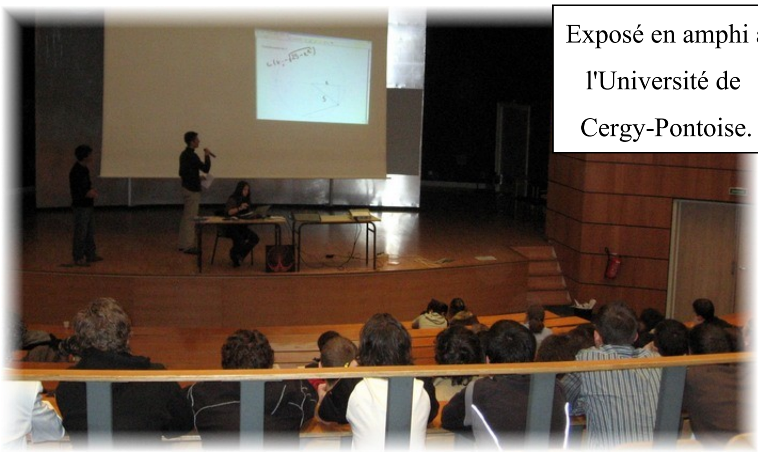
	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
X	**-3,93**	**-2,93**	**-1,99**	**-1,34**	**-0,85**	**-0,5**	**-0,26**	**-0,04**
Y	**2,39**	**1,67**	**1,47**	**1,5**	**1,64**	**1,83**	**2,03**	**3,36**
X²	15,44	8,58	3,96	1,8	0,72	0,25	0,07	0
x²+y²	21,16	11,37	6,12	4,05	3,41	3,6	4,19	11,29
x²-y²	9,73	5,8	1,8	-0,45	-1,97	-3,1	-4,05	-11,29
x³+y²	-54,99	-22,36	-5,72	-0,16	2,08	3,22	4,1	11,29
Y³	13,65	4,66	3,18	3,38	4,41	6,13	8,37	37,93
x²-y³	1,79	3,93	0,78	-1,58	-3,69	-5,88	-8,3	-37,93

Malheureusement, l'imprécision des données et la complexité de celles-ci ne nous ont pas permis d'aboutir...
Délaissant donc cette piste, nous sommes partis du fait que cette courbe est l'enveloppe d'une famille de droites (les rayons réfléchis sur la paroi circulaire de la tasse), et que si l'on déterminait les équations de ces droites, on pourrait en tirer quelque chose.

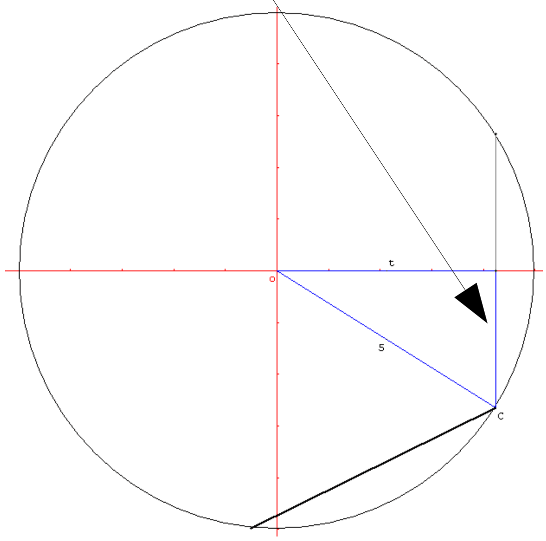
<u>Équations des droites (rayons réfléchis)</u> :

Pour calculer les équations de ces droites, on est partis d'un cercle de rayon 5 pour ne pas nous encombrer de trop de variables (ce cercle représente la paroi de la tasse).

Comme chacun le sait, l'équation d'une droite est du type $y = mx + p$.
La droite incidente a pour équation $x = t$, où t est un paramètre qui varie entre -5 et 5 (repérant la position de départ du rayon incident sachant que le rayon du cercle est 5).
Cette droite est réfléchie au point de contact avec le cercle, c'est-à-dire au point $C(t; -\sqrt{25-t^2})$

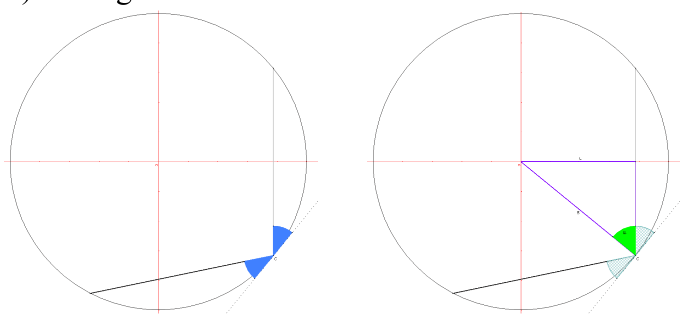


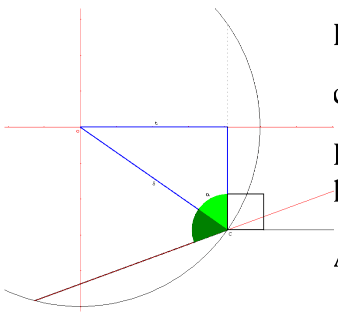
Exposé en amphi à l'Université de Cergy-Pontoise.



D'après la loi de Descartes sur le principe de la réflexion, l'angle incident (l'angle entre la droite incidente et la tangente au cercle au point C) et l'angle réfléchi (l'angle entre la droite réfléchie et la tangente au cercle au point C) sont égaux.

Discussion lors du congrès.





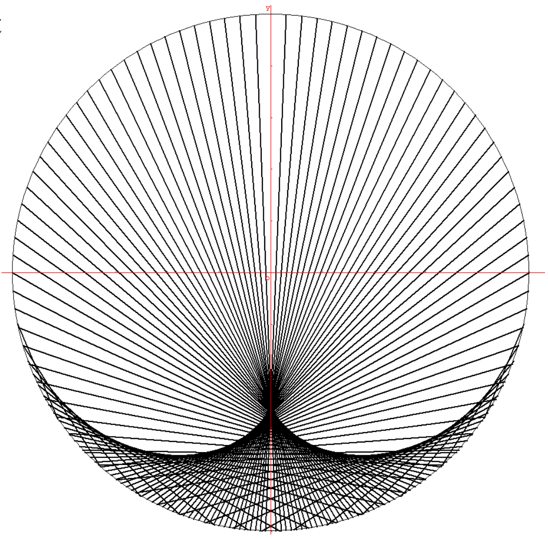
Dans notre cas, cet angle commun α vaut $\arcsin\left(\frac{t}{5}\right)$.

Le coefficient directeur (ou pente) d'une droite correspond à la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'horizontale, $2\alpha+\pi/2-\pi$

Ainsi $m = \tan\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

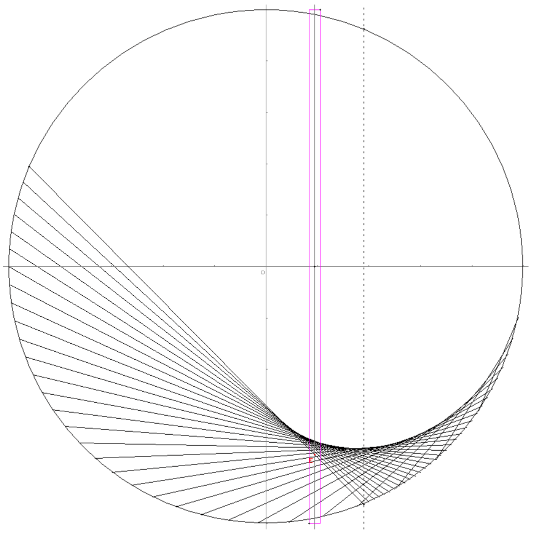
Il ne reste plus qu'à dire que notre droite passe par le point C, et on obtient: $y=\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)x-\sqrt{25-t^2}-m\cdot t$ avec

$m=\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ et $\alpha=\arcsin\left(\frac{t}{5}\right)$



Quand on fait tracer ces droites données par leurs équations pour t variant de -5 à 5, on obtient bien la caustique observée expérimentalement (ouf !).

<u>La grande idée</u> :



Ensuite, nous avons remarqué que, pour un x donné, il existe plusieurs droites réfléchies contenant un point d'abscisse x, mais qu'un seul de ces points est sur la caustique. Ce point est « le plus haut », autrement dit celui qui est le plus proche de l'axe des abscisses.

Cette remarque est très importante car elle a servi de point de départ à notre recherche.

En effet, les extremums sont là où la dérivée s'annule. Donc, si on dérive l'équation des droites de l'enveloppe par rapport à t et en regardant où cette dérivée s'annule, on peut espérer obtenir le point « le plus haut » qui est sur la caustique.

C'est parti !!!

La dérivée de $\tan(t)$ est $\frac{1}{\cos^2(t)}$ et la dérivée de $\arcsin(t)$ est $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Ainsi la dérivée de

$y=\tan\left(2\arcsin\left(\frac{t}{5}\right)-\frac{\pi}{2}\right)x-\sqrt{25-t^2}-\tan\left(2\arcsin\left(\frac{t}{5}\right)-\frac{\pi}{2}\right)\cdot t$ est

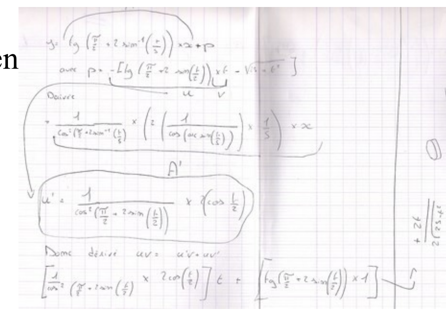
$y'=m'x+p'$ avec

$m'=\frac{2/5}{\sqrt{1-\frac{t^2}{25}}}\times\frac{1}{cos^2\left(2\arcsin\left(\frac{t}{5}\right)-\frac{\pi}{2}\right)}$ et $p'=\frac{t}{\sqrt{25-t^2}}-m'\cdot t-\tan\left(2\arcsin\left(\frac{t}{5}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$

Il nous reste maintenant à résoudre l'équation $m'x+p'=0$ en l'inconnue t.

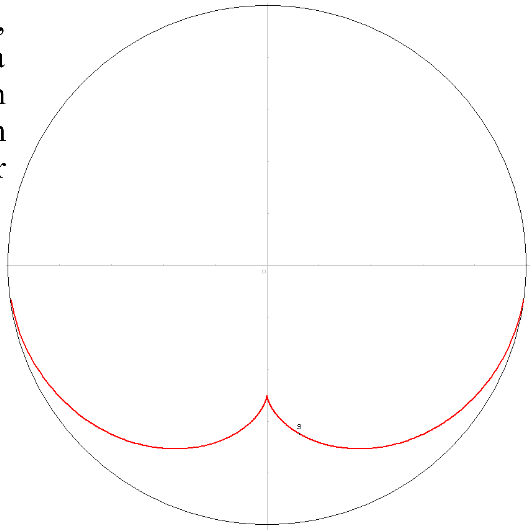
En fait, on remarque que la résolution en x semble être bien plus facile qu'en t car on a $x=\frac{-p'}{m'}$.

Extrait du cahier de recherche des élèves >



Au début, pour un x donné, nous étions partis pour chercher, parmi les rayons réfléchis, la droite qui donne le point de la caustique ayant pour abscisse x (c'est-à-dire chercher le t en fonction de x). Mais finalement, on a plutôt trouvé le x en fonction de t, autrement dit à un t donné on est capable d'associer le point correspondant de la caustique.

Si on trace alors l'ensemble des points
S($x(t)$; $y(t) = m(t)x(t) + p(t)$) quand t varie de -5 à 5,
on obtient **la caustique**.



Travail de recherche au lycée.

Exposé blanc au lycée.

Les élèves avec leurs panneaux.

Présentation à des élèves de Poitiers