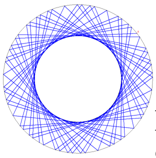
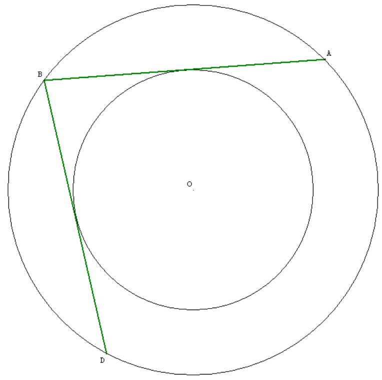


Problème de fermeture

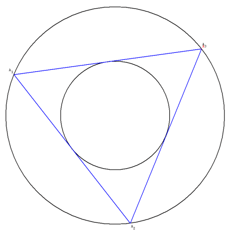
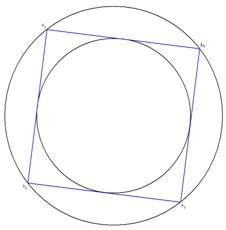
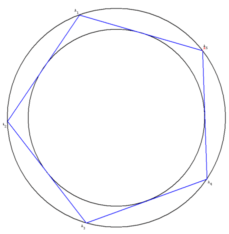
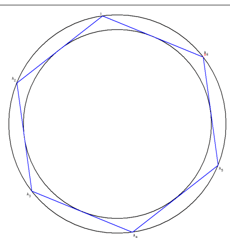
par Marie LACROIX, élève de Première S du Lycée d'Altitude de Briançon.



Imaginons deux cercles C et c de même centre O et de rayons respectifs R et r avec $R>r$.
Soit A un point du cercle C. Nous traçons une tangente au cercle c passant par A. L'intersection entre le cercle C et cette tangente nous donne le point B. Avec le même principe, en partant de B nous obtenons D.
On s'est demandé si en renouvelant le processus nous retrouvions le point A.

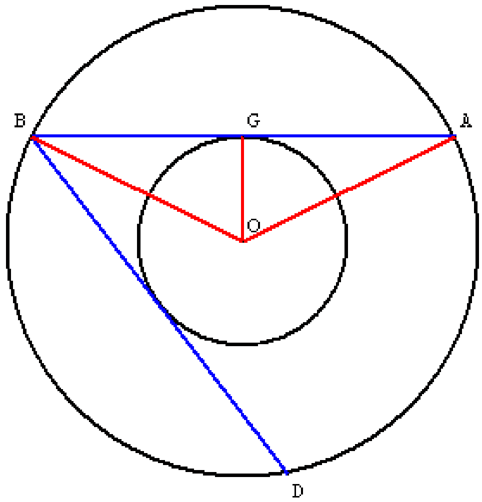
Démarche :

C'est grâce à des expériences que j'ai pu conjecturer un résultat que j'ai ensuite démontré.
J'ai travaillé sur des polygones réguliers en étudiant le rapport des rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit.

Nom du polygone		Rapport entre r et R
Triangle équilatéral		$\frac{r}{R}=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$
Carré 		$\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$
Pentagone régulier		$\frac{r}{R}=\cos\frac{\pi}{5}$
Hexagone régulier		$\frac{r}{R}=\cos\frac{\pi}{6}$

J'ai conjecturé que pour obtenir un polygone régulier à *n* côtés il faut et il suffit que $\frac{r}{R}=\cos\frac{\pi}{n}$.

Démonstration de la conjecture :



- Supposons que la trajectoire soit un polygone régulier dont on désigne par *n* le nombre de côtés.

  On veut montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{r}{R}$

Le triangle ABO est isocèle en O et on a $\widehat{BOA}=\frac{2\pi}{n}$

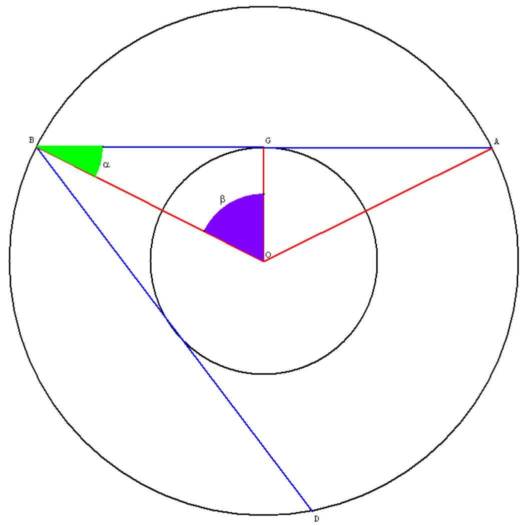
ainsi $\widehat{GOA}=\frac{\pi}{n}$.

mais on a aussi $\cos(\widehat{GOA})=\frac{GO}{OA}=\frac{r}{R}$

En conclusion, si nous obtenons un polygone régulier à *n* côtés

alors $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{r}{R}$

- Réciproquement, si $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{r}{R}$ alors est-ce que la figure que l'on obtient est un polygone régulier à *n* côtés ?



Posons $\widehat{OBG}=\alpha$ et $\widehat{BOG}=\beta$.

On a $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{r}{R}$ par hypothèse et $\sin(\alpha)=\frac{r}{R}$.

Ainsi $\sin(\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Mais $\sin(\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Ce qui donne $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Par conséquent, on en déduit $\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{n}$ (car les deux angles sont entre 0 et π).

Après simplification $\alpha=\frac{(n-2)\pi}{2n}$

il en résulte alors $\widehat{BOA}=2\beta=2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)=\frac{2\pi}{n}$, ce qui veut dire que le polygone est régulier.

Conclusion : On obtient un polygone régulier à *n* côtés si et seulement si $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{r}{R}$

Question : Les rayons *r* et *R* étant donnés, existe-t-il toujours un entier *n* tel que $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{r}{R}$?