Optimisation
de recherche en avalanche

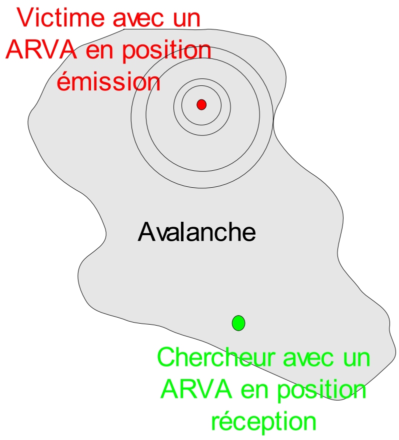
Sujet MATh.en.JEANS
du lycée d'Altitude de Briançon
2007/2008

Par PEIGNOT Kévin et SEGRETAIN Armel
élèves de Terminale S3

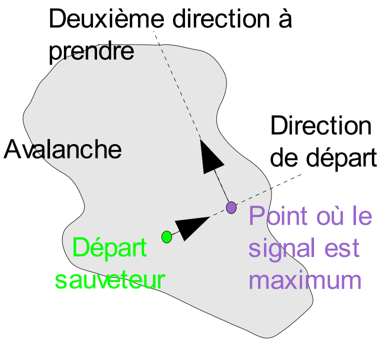
Hubert PROAL, enseignant et
Patrick VEROVIC, chercheur à l'université de Savoie.

<u>Le principe de recherche en avalanche avec un DVA (ARVA)</u>

Le sauveteur choisit une direction initiale.



Dans cette direction, l'ARVA émet un signal qui est d'autant plus fort que l'on est proche de la victime.
À l'endroit où le signal est le plus important on prend la direction perpendiculaire.



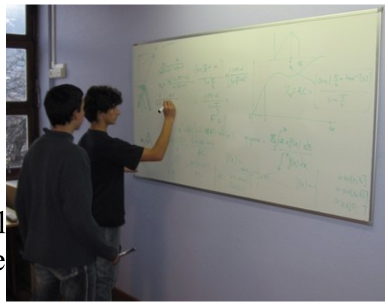
Si le signal faiblit, c'est que l'on s'éloigne de la victime, donc on repart dans l'autre sens. On cherche l'endroit où le signal est le plus fort sur cette nouvelle direction.
On en prend la perpendiculaire et on recommence, jusqu'à ce que l'on arrive à peu près à la victime.

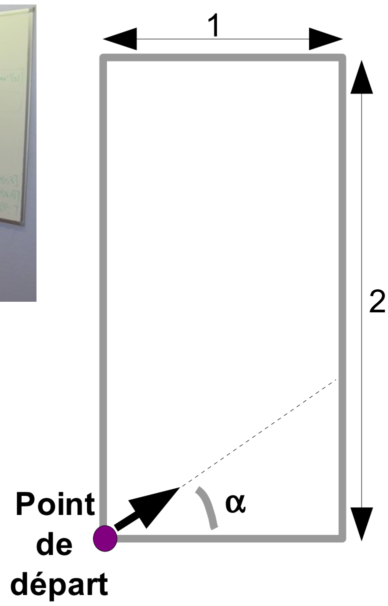
On repère alors la personne avec précision, en particulier la profondeur, à l'aide d'une sonde avant de creuser.

Problème :
Quelle direction initiale faut-il prendre pour que la longueur moyenne parcourue pour trouver la victime soit la plus petite ?

<u>Notre modélisation</u>

L'avalanche est représentée par un rectangle de dimensions 1x2.
On part toujours du coin inférieur gauche.





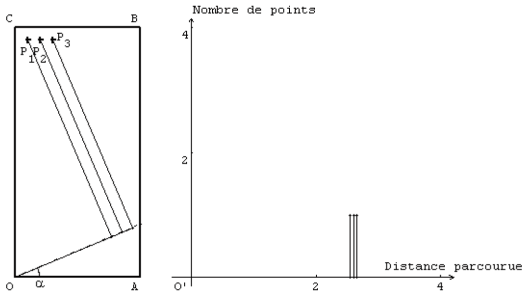
On note α l'angle entre la direction de départ et l'horizontale.

<u>Travail des années précédentes</u>

Ce sujet a déjà été traité durant deux années dans l'atelier *MATh.en.JEANS* du lycée d'Altitude.
Les élèves avaient fait leurs recherches avec un angle de départ α=0°. D'abord par simulation, puis plus rigoureusement, ils avaient trouvé une distance moyenne de 1,5.

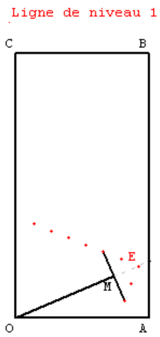
Traitement du modèle

Ayant fixé un angle de départ α, on doit calculer, pour chacun des points de l'avalanche, la longueur totale parcourue pour arriver à ce point (où se trouve potentiellement la victime) avant de faire la moyenne de ces longueurs.

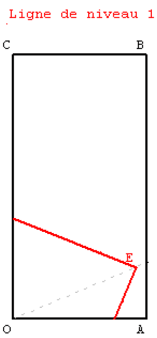


Ici nous ne sommes pas dans un cas discret mais continu, puisqu'il y a une infinité de points dans l'avalanche. On ne peut donc pas comptabiliser toutes les positions possibles de la victime.
On a dû procéder autrement en cherchant tout d'abord l'ensemble des points séparés d'une même longueur du point de départ, ce qu'on appelle les lignes de niveau ou les cercles (attention on n'est pas avec la métrique traditionnelle !).

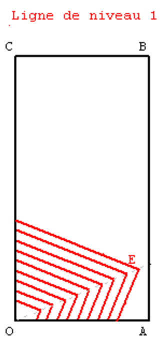
Pour la ligne de niveau 1 (c'est-à-dire tous les points qui sont séparés d'une longueur totale égale à 1 du point de départ)



On a le point E qui est à 1 de O sur la direction de départ.
Puis on peut parcourir une distance moindre que 1 et effectuer le complémentaire sur la perpendiculaire.

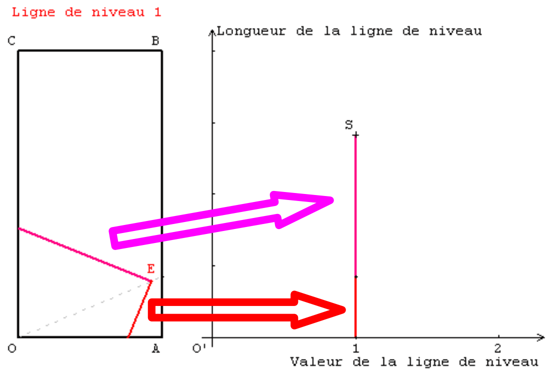


La ligne de niveau 1 forme une « pointe » de part et d'autre de la direction de départ.



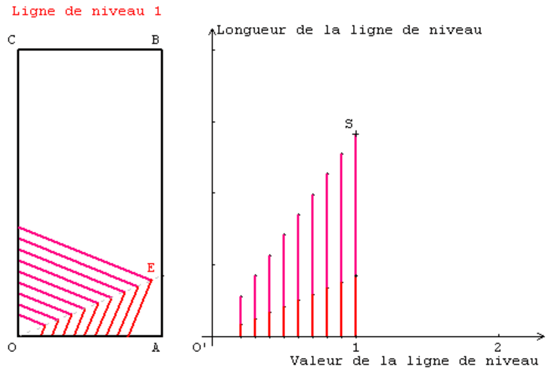
Voici diverses lignes de niveau.

On a ainsi construit un diagramme en bâtons en mettant en abscisse les valeurs des lignes de niveau et en ordonnée la longueur de la ligne de niveau correspondante.



On obtient la fonction de densité f qui est linéaire par morceaux.

Pour chaque valeur x d'une ligne de niveau, $f(x)$ représente le « nombre » de victimes qui se trouvent sur la ligne de niveau considérée. En effet, plus la ligne de niveau x a une longueur $f(x)$ qui est grande, et plus il y a de victimes à cette distance-là.

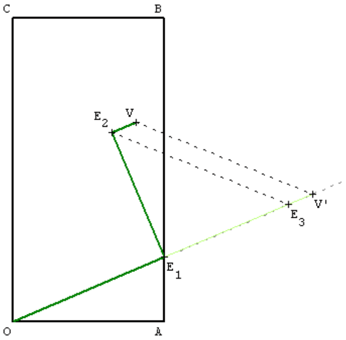


On calcule ensuite la moyenne des valeurs x pondérées par les poids $f(x)$, c'est-à-dire $\dfrac{\int f(x) \times x\, dx}{\int f(x) dx}$ dans le cas continu (l'équivalent de $\dfrac{\sum \textit{nombre de points} \times \textit{valeur de la ligne de niveau}}{\sum \textit{nombre de point}}$ si nous étions dans le cas discret)

Présentation à l'université Paris-Diderot

Oui, mais qu'en est-il des autres lignes de niveau ?

Il peut arriver que, pour accéder à la victime, on prenne deux perpendiculaires



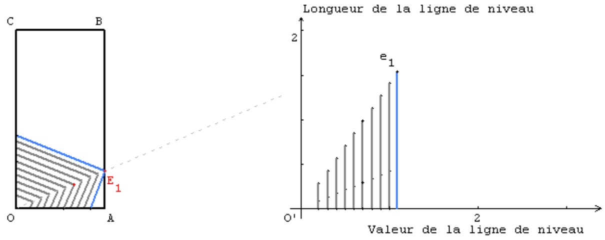
On peut arriver à lire la distance parcourue pour arriver à cette victime sur la direction de départ.

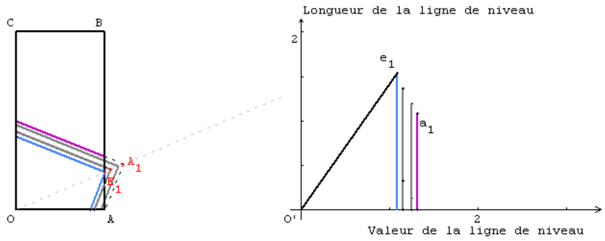
En effet EE_2E_3 est un triangle rectangle isocèle donc $E_1E_2=E_1E_3$

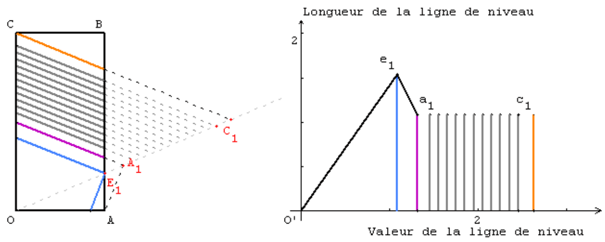
$E_2VV'E_3$ est un parallélogramme donc $E_2V=E_3V'$

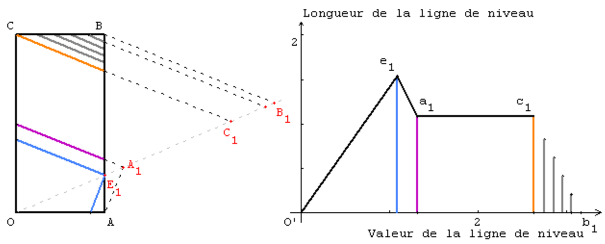
Ainsi nous allons pouvoir tracer les autres lignes de niveau et lire leurs valeurs sur la direction de départ.

Forts de cette remarque, nous pouvons construire complètement la fonction densité. Il y a quatre points clés.

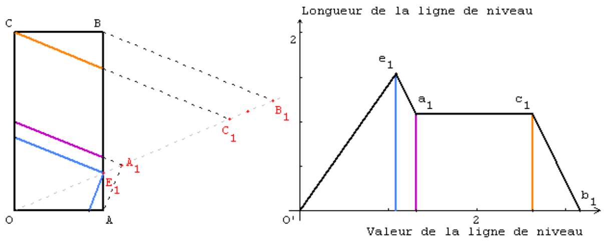








Finalement :

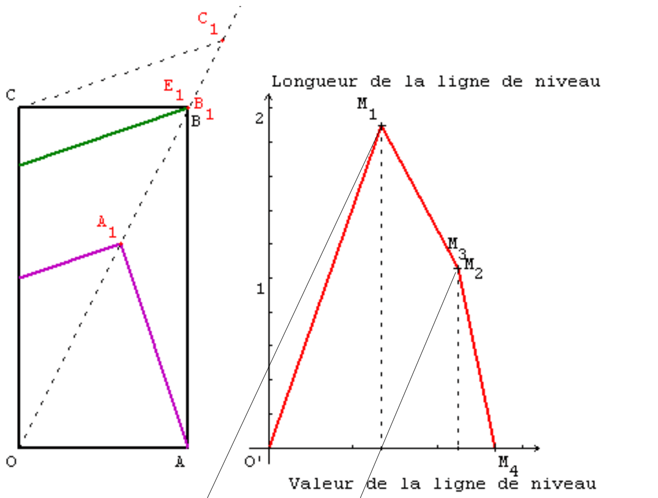


On calcule enfin $\dfrac{\displaystyle\int_0^{b_1} x\,f(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^{b_1} f(x)\,dx}$.

Conjecture :

Une grande partie de nos calculs s'est faite dans le cas où la direction de départ était la grande diagonale. Nous avions alors conjecturé que cette direction était la meilleure.

Nous avons cherché les valeurs exactes des coordonnées des points clés.



$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\arctan(2)\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} \simeq 2{,}62 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \sqrt{5} \simeq 2{,}24 \\ y_2 = \dfrac{1}{\cos\left(\arctan(2)-\dfrac{\pi}{4}\right)} \simeq 1{,}05 \end{cases}$$

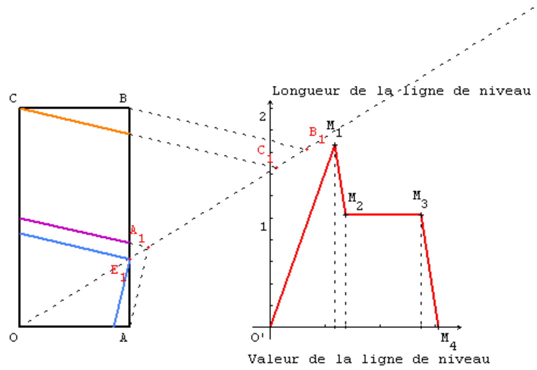
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\arctan(2)\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} \simeq 1{,}34 \\ y_1 = \dfrac{\cos(\arctan(2))}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} + \dfrac{\sin(\arctan(2))}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} \simeq 1{,}89 \end{cases}$$

À partir de ces valeurs nous avons calculé les équations, puis $\dfrac{\int_0^{x_3} x\, f(x)\, dx}{\int_0^{x_3} f(x)\, dx}$ avec l'aide d'un tableur. Nous avons obtenu la valeur moyenne 1,41 (pour α=arctan(2)). Cette dernière est plus satisfaisante que la précédente étude (m=1,5 pour α=0°) mais nous ne savions pas si c'était vraiment la meilleure. L'étude générale suivante va montrer que non.

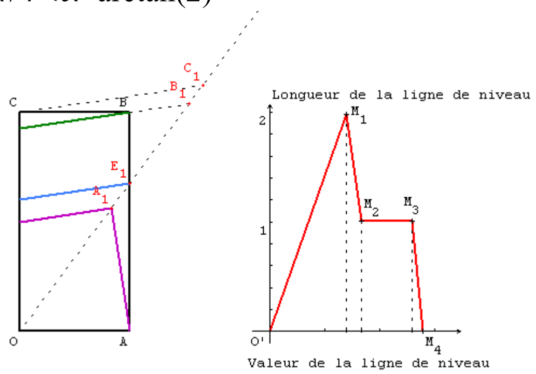
La forme de la fonction de densité

Selon la valeur de l'angle α, la fonction densité a une forme différente :

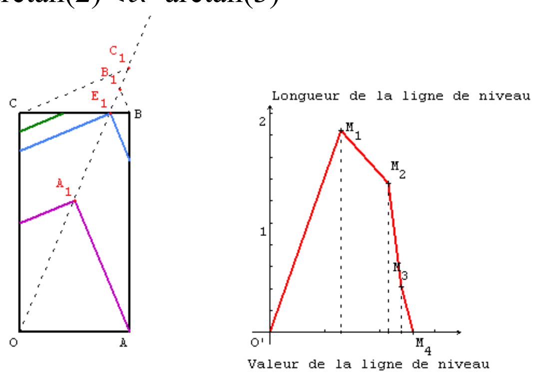
Si $0 \leqslant \alpha < \pi/4$



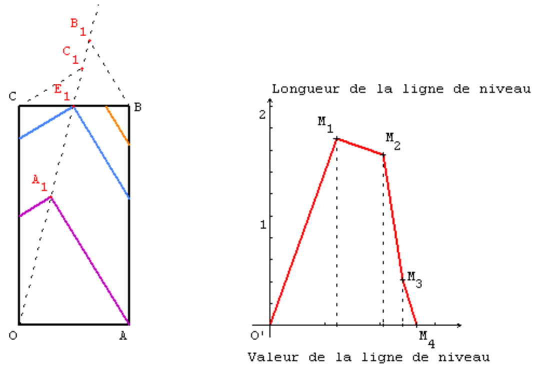
Si $\pi/4 \leqslant \alpha <$ arctan(2)



Si arctan(2) $\leqslant \alpha <$ arctan(3)

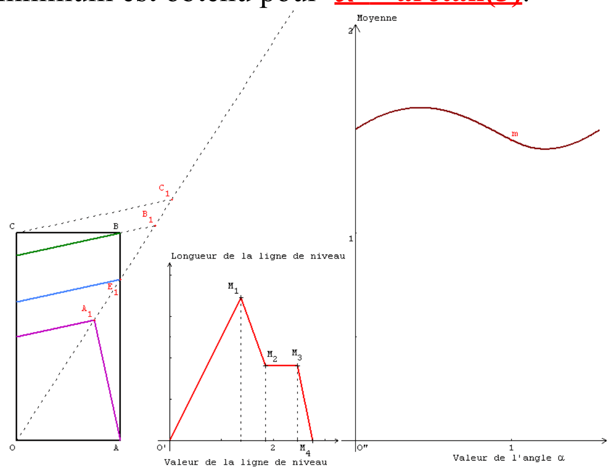


Si arctan(3) $\leqslant \alpha$



La solution

Si on calcule la moyenne des longueurs parcourues pour chaque valeur de l'angle α, on obtient une fonction de cet angle dont le minimum est obtenu pour **α = arctan(3)**.



Présentation à des élèves de Poitiers