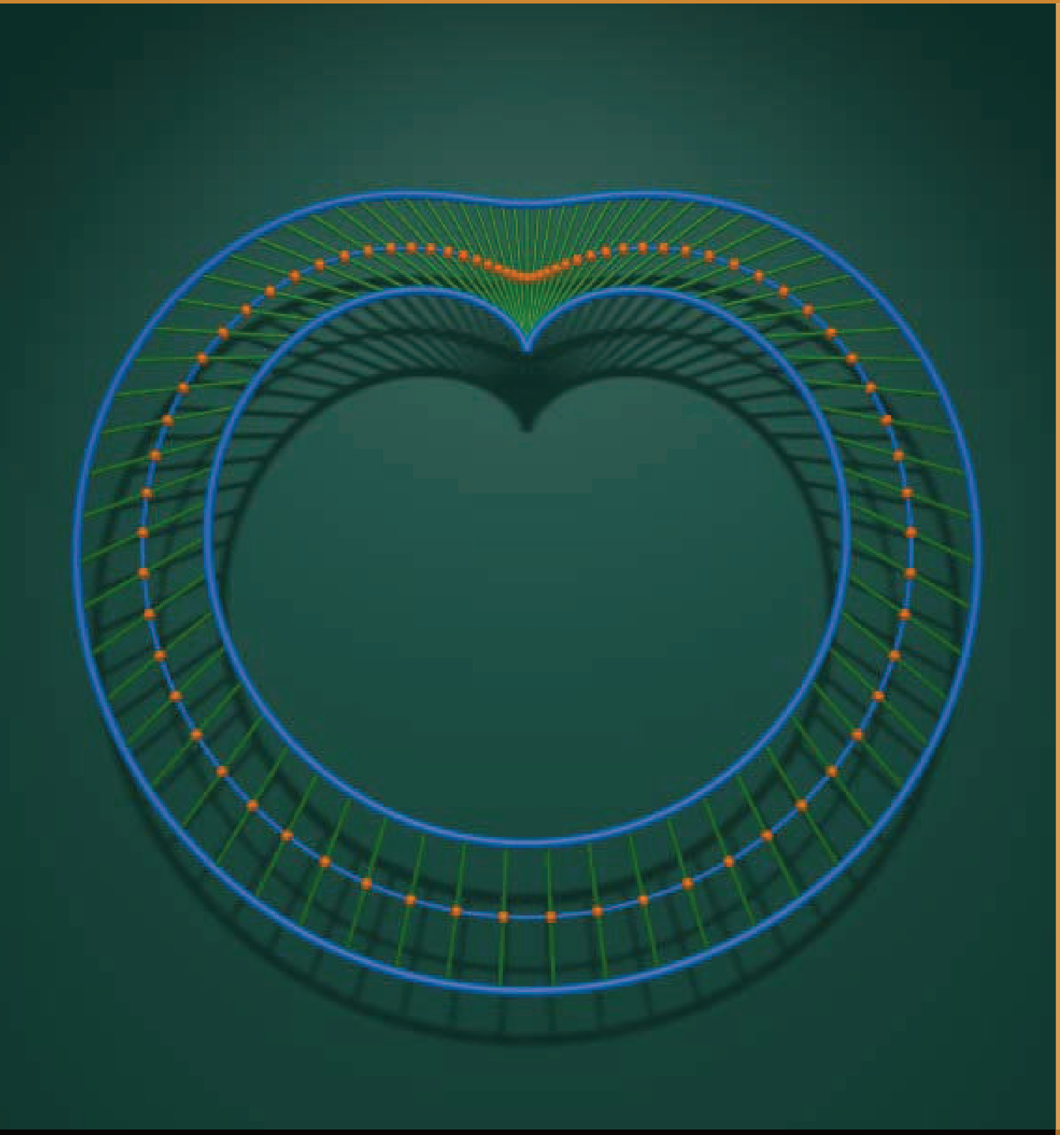
Quadrature

Magazine de mathématiques pures et épicées

La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde



Textes en questions

Un peu de géométrie tropicale

Équation fonctionnelle de la tangente hyperbolique...

Optimisation de recherche en avalanche

Imagination...

n°74

Magazine trimestriel
Octobre-Décembre 2009
8,50 euros
ISSN 1142-2785

EDP SCIENCES

Quadrature n° 74 (2009) 35–38
© EDP Sciences, 2009
DOI: 10.1051/quadrature/2009016

Optimisation de recherche en avalanche

par Kévin Peignot et Armel Segretain

Résumé.
Ce court texte présente un essai de modélisation des recherches de victimes lors d'avalanches. Après une phase de simplification et de modélisation, les auteurs étudient et résolvent numériquement le problème d'optimisation associé.
Lors de la réalisation de ce travail dans le cadre d'un atelier MATh.en.JEANS, les auteurs étaient élèves de terminale au lycée d'Altitude de Briançon. Ce texte a été présenté au congrès MATh.en.JEANS 2008 et au concours Faites de la science organisé par la Conférence des Doyens et Directeurs des UFR Scientifiques des Universités Françaises au CNRS où il a obtenu le prix de sciences physiques.

I Le principe de recherche en avalanche

Pour retrouver un skieur enseveli sous une avalanche, un sauveteur choisit une direction initiale et avance dans cette direction. Alors, l'ARVA (appareil de recherche de victimes d'avalanche aussi appelé DVA pour détecteur de victimes d'avalanche) émet un signal qui est d'autant plus fort qu'il est proche de la victime. À l'endroit où le signal est le plus important, le sauveteur prend la direction perpendiculaire. Si le signal faiblit, c'est qu'il s'éloigne de la victime, donc il repart dans l'autre sens. Il cherche alors l'endroit où le signal est le plus fort sur cette nouvelle direction, puis prend la perpendiculaire et recommence, jusqu'à ce qu'il arrive à peu près à la victime. Il repère alors la personne avec précision, en particulier la profondeur, à l'aide d'une sonde puis creuse pour la libérer.

Le problème est alors le suivant :
Quelle direction initiale faut-il prendre pour que la longueur moyenne parcourue pour trouver la victime soit la plus petite ?

II Modélisation et résolution numérique

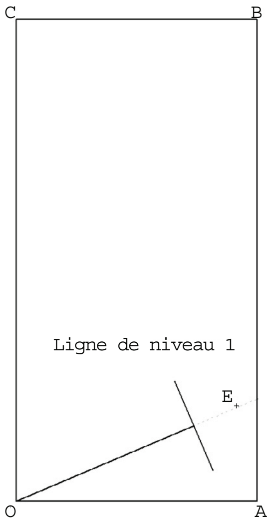
II.1 Modélisation

Dans ce texte la zone d'avalanche est représentée par un rectangle $OABC$ de dimensions 1×2. On (c'est-à-dire le sauveteur) part toujours de O, le coin inférieur gauche du rectangle et on note α l'angle entre la direction de départ et l'axe des abscisses.

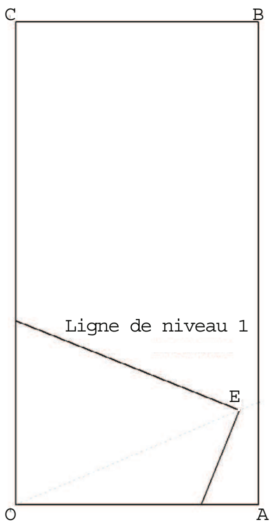
II.2 Détermination de la longueur moyenne

Ayant fixé l'angle de départ α, on doit calculer, pour chacun des points de l'avalanche, la longueur totale parcourue pour arriver à ce point (où se trouve potentiellement la victime) par la méthode de recherche précisée à la section précédente, puis faire la moyenne de ces longueurs. Malheureusement, nous ne sommes pas dans un simple cas discret mais dans une situation avec des grandeurs continues, puisqu'il y a une infinité de points dans l'avalanche. On ne peut donc pas comptabiliser toutes les positions possibles de la victime. Par conséquent, on a dû procéder autrement en cherchant tout d'abord l'ensemble des points séparés d'une même longueur du point de départ, ce qu'on appelle les lignes de niveau ou les cercles (attention, ce n'est pas le sens usuel de cercle puisque l'on ne travaille pas avec la métrique usuelle).

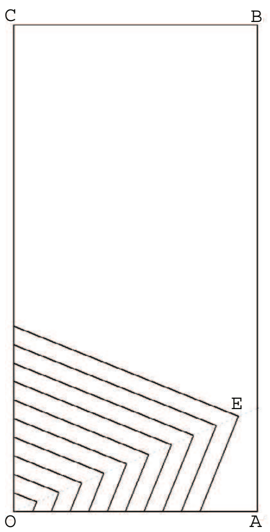
Déterminons, dans un premier temps, la forme de la ligne de niveau 1 (c'est-à-dire tous les points qui sont séparés d'une longueur totale égale à 1 du point de départ). Considérons le point E à distance 1 de l'origine O dans la direction de départ. Il appartient évidemment à la ligne de niveau recherchée. On peut trouver les autres points de cette ligne de niveau en parcourant une distance moindre que 1 dans la direction initiale, puis en effectuant le complémentaire sur la perpendiculaire.



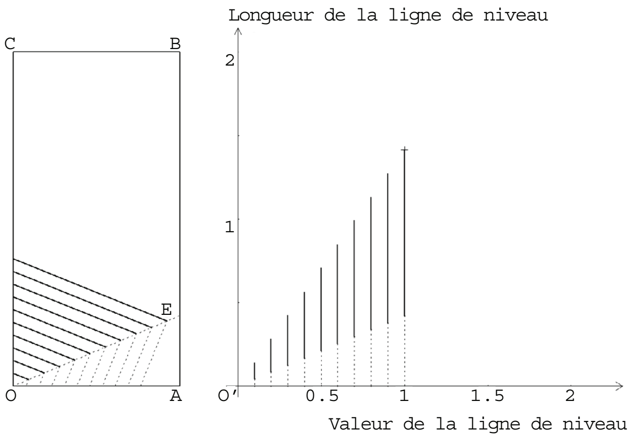
On obtient ainsi que la ligne de niveau 1 forme une sorte de « pointe » de part et d'autre de la direction de départ.



Voici, par la même méthode, diverses lignes de niveau pour des valeurs inférieures ou égales à 1.

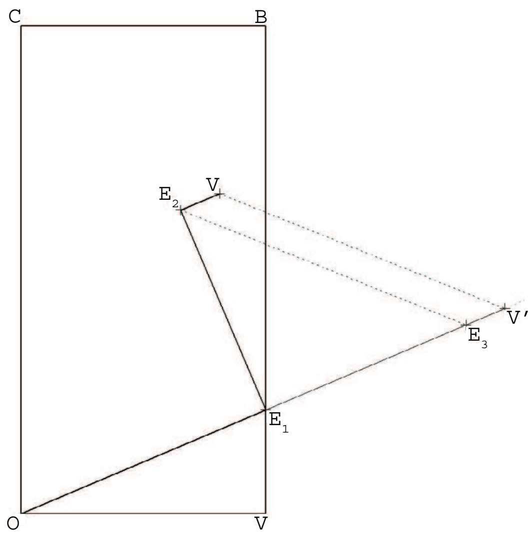


On a alors construit un diagramme en plaçant en abscisse les valeurs des lignes de niveau et en ordonnée la longueur de la ligne de niveau correspondante. La courbe ainsi obtenue représente la fonction densité f qui est linéaire par morceaux. Intuitivement, pour la ligne de niveau x, $f(x)$ s'interprète comme le « nombre » de victimes qui se trouvent potentiellement sur cette ligne de niveau.

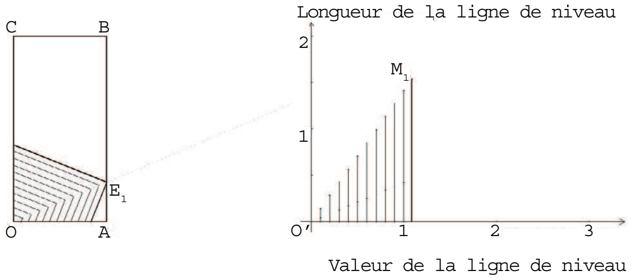


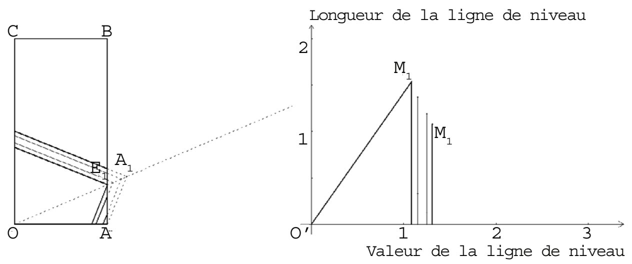
Pour obtenir la moyenne du parcours avant découverte de la victime, on calcule la moyenne des valeurs x pondérées par les poids $f(x)$, c'est-à-dire $\frac{\int xf(x)\mathrm{d}x}{\int f(x)\mathrm{d}x}$ dans ce cas continu.

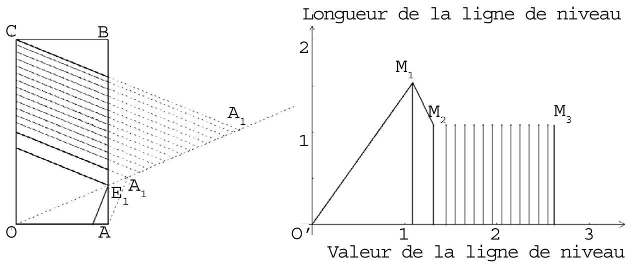
Oui, mais pour effectuer ce calcul, il convient d'étudier aussi les autres lignes de niveau supérieur à 1. Dans ce cas, il peut arriver que, pour accéder à la victime, on doive prendre deux perpendiculaires.



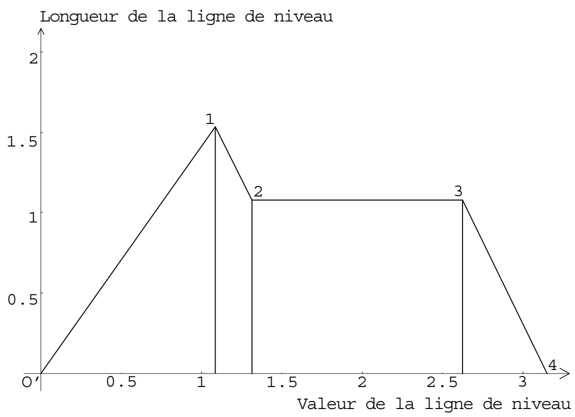
Dans le cas représenté par la figure, on peut parvenir à lire la distance parcourue pour arriver à cette victime sur la direction de départ. En effet, avec les notations de la figure, $E_1E_2E_3$ est un triangle rectangle isocèle donc $E_1E_2 = E_1E_3$. $E_2VV'E_3$ est un parallélogramme donc $E_2V = E_3V'$. Ainsi nous allons pouvoir tracer les autres lignes de niveau et lire leurs valeurs sur la direction de départ. Forts de cette remarque, nous pouvons construire complètement la fonction densité. Il y a quatre points clés que l'on note M_1, M_2, M_3 et M_4 où la densité change de pente. La construction géométrique donne successivement :







Finalement, on obtient la courbe suivante :



Il ne reste qu'à calculer $\dfrac{\int xf(x)\mathrm{d}x}{\int f(x)\mathrm{d}x}$.

La majeure partie de nos calculs s'est faite dans le cas où la direction de départ était la grande diagonale (c'est-à-dire $\alpha = \arctan 2$) car nous avions alors initialement conjecturé que cette direction était la meilleure.

Dans ce cas, nous avons cherché les valeurs exactes des coordonnées des points M_1, $M_2 = M_3$ et M_4 où la courbe de la densité f changeait de pente.

En notant (x_i, y_i) les coordonnées du point M_i, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \arctan(2)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \approx 1,34 \\ y_1 &= \dfrac{\cos(\arctan(2))}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \dfrac{\sin(\arctan(2))}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \approx 1,89 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 &= \sqrt{5} \approx 2,24 \\ y_2 &= \dfrac{1}{\cos\left(\arctan(2) - \frac{\pi}{4}\right)} \approx 1,05 \end{cases}$$

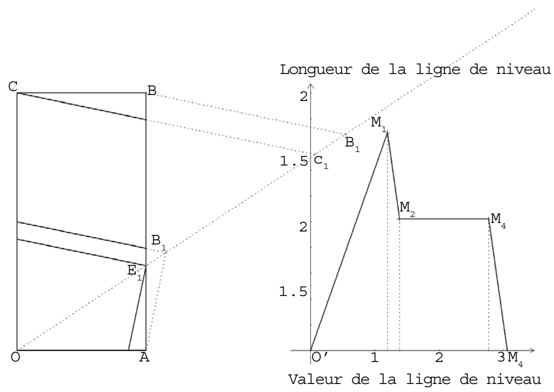
$$\begin{cases} x_4 &= \dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \arctan(2)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \approx 2,62 \\ y_4 &= 0. \end{cases}$$

À partir de ces valeurs, nous avons calculé les équations des portions de droites définissant f, puis $\dfrac{\int_0^{x_4} xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^{x_4} f(x)\mathrm{d}x}$. Nous avons obtenu la valeur moyenne 1,41 (pour cette valeur, $\alpha = \arctan 2$). Toutefois, nous ne savions pas, à ce moment de l'étude, si cette valeur était vraiment optimale. Quelques calculs avec le logiciel GÉOPLAN ont montré que ce n'est pas le cas.

II.3 Recherche numérique de l'angle optimal

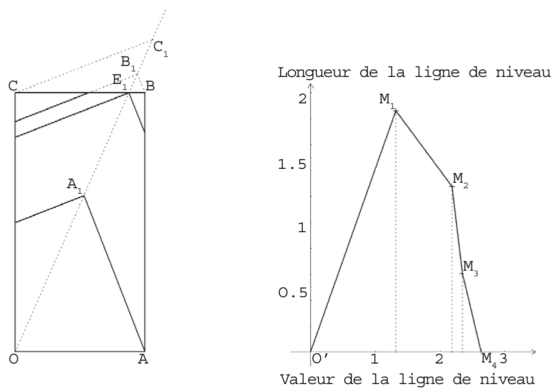
Selon la valeur de l'angle α, la fonction densité prend des formes différentes. Voici quelques illustrations :

– Si $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$:

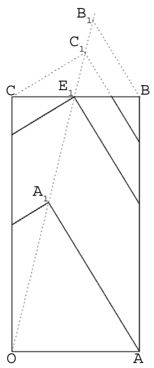


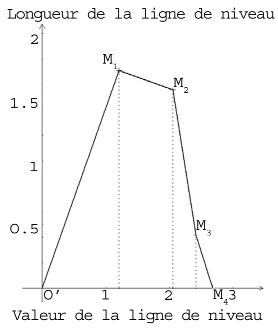
On obtient une forme analogue pour $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \arctan 2$.

– Si $\arctan 2 \leq \alpha < \arctan 3$:

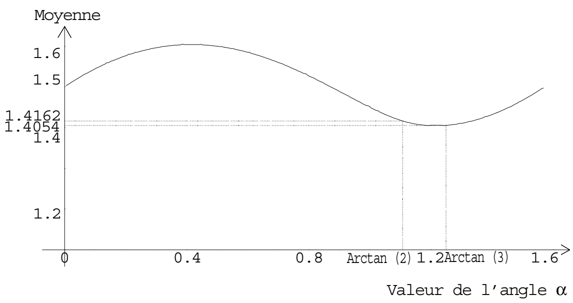


– Si $\arctan 3 \le \alpha$:





Le logiciel calcule numériquement la moyenne des longueurs parcourues pour les différentes valeurs de l'angle α et on obtient la longueur moyenne comme fonction de cet angle ; le minimum est obtenu pour l'angle $\alpha = \arctan 3$.



La densité correspondant à ce minimum a alors la forme suivante :