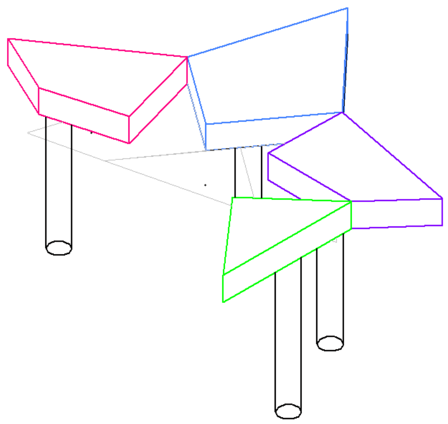
La table de Dudeney

Sujet MATh.en.JEANS
du lycée d'Altitude de Briançon
2007/2008

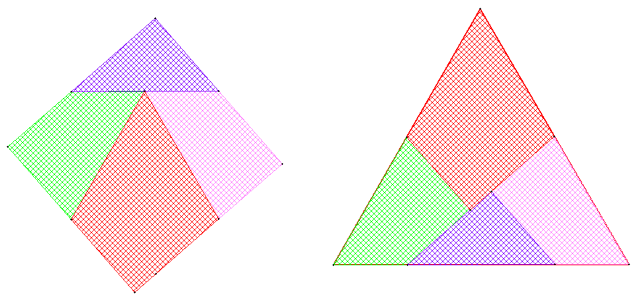
Par BERT Laëticia, BARTHALAIS Yves,
FORTOUL Thomas et MALAVAL Stéphane,
élèves de seconde.
Ainsi que GRANOUILLET Lucie (T°ES),
BOSSUET Alice (T°GE) et
LACROIX Marie (T°S)

Enseignant : PROAL Hubert
Chercheur : VEROVIC Patrick
(université de Savoie)

PROBLÈME



La table de Dudeney est une table composée de

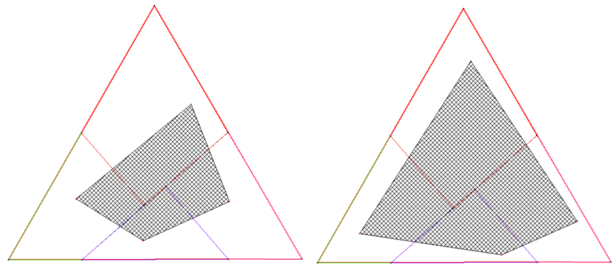


quatre pièces. Selon la disposition de ces pièces, la table sera de forme triangulaire ou carrée.
Notre problème a été de trouver l'emplacement des quatre pieds de la table (un pied par pièce) de manière à ce qu'elle soit la plus stable possible (aussi bien sous la forme du triangle que celle du carré).

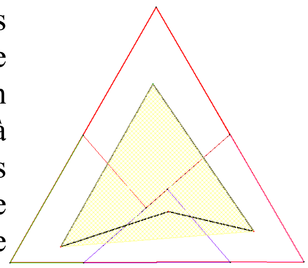
Notre premier souci a été de définir la notion de stabilité. Comment expliquer qu'une position est plus stable qu'une autre ?

Travaux de recherche des élèves de seconde.

Nous avons choisi la définition suivante de la stabilité : plus l'aire du polygone formé par les quatre pieds de la table est grande, plus la table est stable. Nous calculons alors l'aire de ce polygone divisée par l'aire totale de la table.

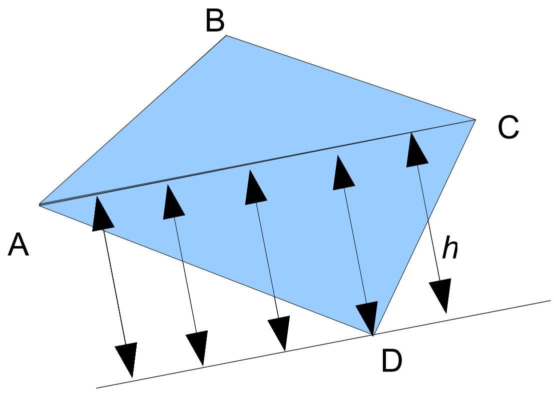


Par exemple, la table du deuxième dessin est plus stable que celle du premier.
Plus tard, nous nous sommes rendus compte que cette définition « fonctionne » à condition qu'il n'y ait pas d'angle rentrant. Dans ce cas, il faut prendre le polygone engendré par



les trois autres pieds. Ainsi il est indispensable de choisir l'aire la plus grande, quitte à « supprimer » un des pieds.

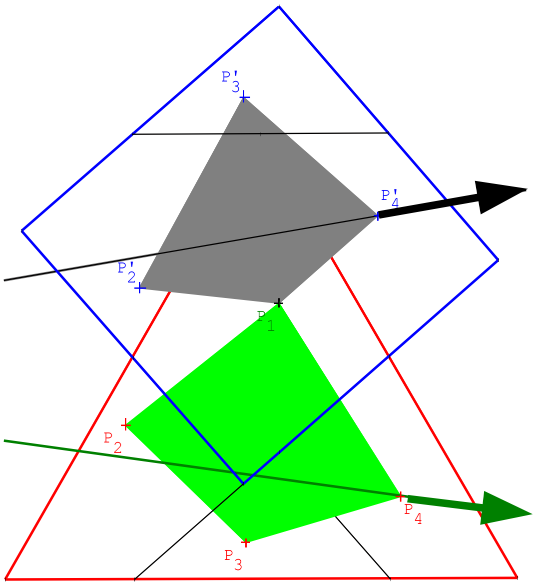
La recherche de la solution optimale (si elle existe) s'est basée sur la propriété suivante :
étant donné un quadrilatère ABCD dont on fixe les sommets A, B, C et qu'on déplace le sommet D sur la parallèle à (AC) passant par D, alors le quadrilatère ABCD conserve son aire.



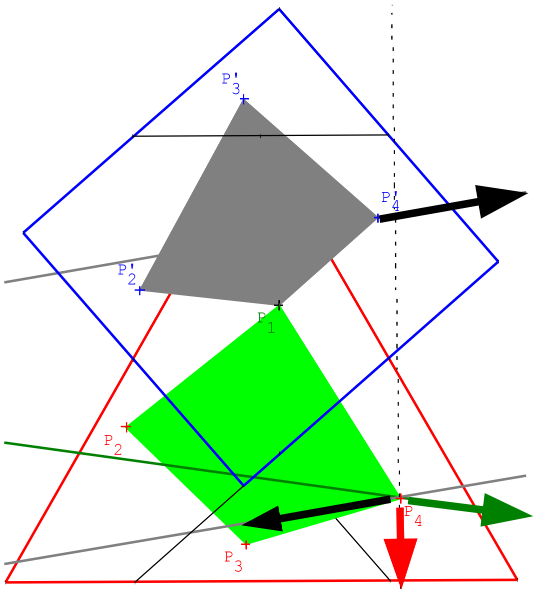
Aire de ADC vaut $\frac{1}{2}\times AC\times h$

Donc, pour augmenter la surface rapidement en ne bougeant que le point D, il faut le déplacer vers l'extérieur et perpendiculairement à (AC). Ce qui correspond à l'augmentation de *h*.

Nous avons d'abord fixé trois points. Au quatrième point (P_4 dans le cas ci-dessous) nous avons appliqué cette propriété dans les deux positions de la table.



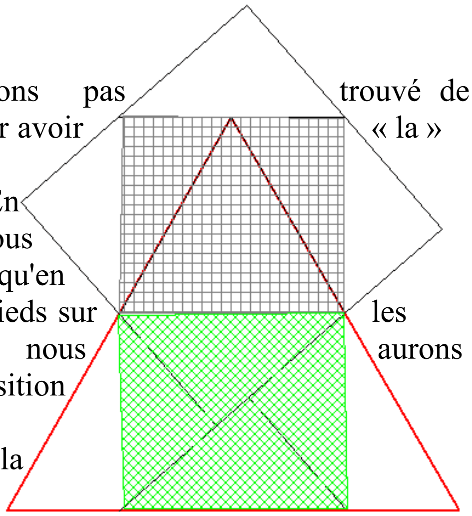
Nous obtenons deux directions (une par position de la table, direction noire et direction verte), nous avons pris la bissectrice des deux directions pour augmenter la surface dans les deux cas.

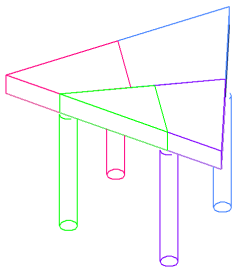


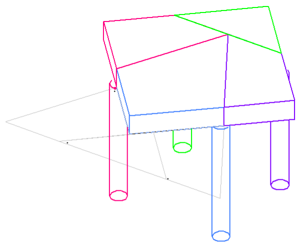
Nous procédons ensuite de la même manière pour les trois autres pieds de table.
Nous pensions arriver à une solution optimale, mais ce ne fut pas le cas.

Conclusion :

Nous n'avons pas trouvé de méthode pour avoir « la » meilleure solution. En revanche, nous pensons qu'en plaçant les pieds sur les charnières nous aurons la position recherchée, c'est-à-dire la plus stable.



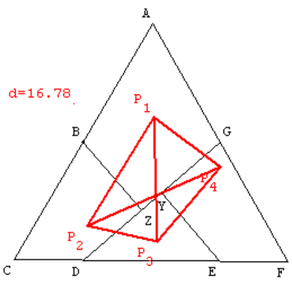


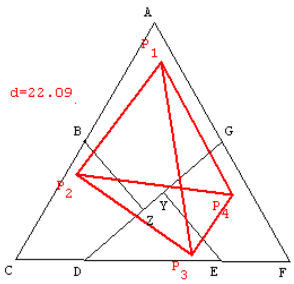


Travaux de recherche des élèves de terminale

Notation et définitions :

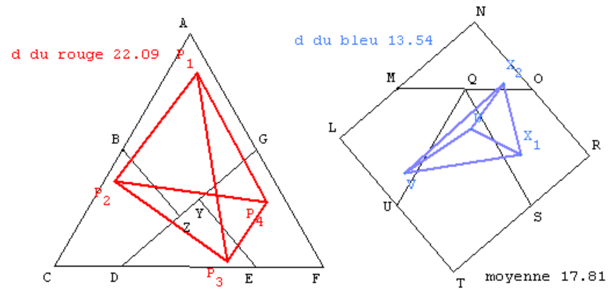
Nous désignons par d la somme des distances entre toutes les paires de pieds de la table.
Tout d'abord, parmi deux tables ayant la même configuration, celle ayant le plus grand d sera considérée comme la plus stable.





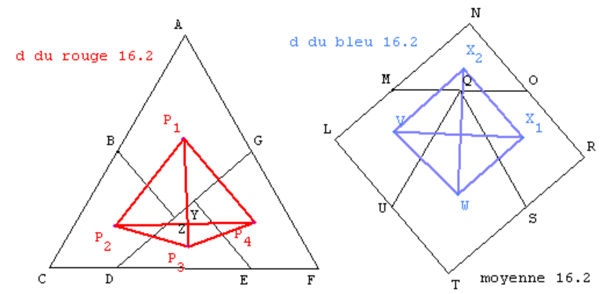
Présentation lors du congrès à Paris

Ensuite, par rapport à notre problématique, une table sera d'autant plus stable (dans l'absolu) que la moyenne des deux valeurs de *d* obtenues dans les configurations triangulaire et carrée est plus grande.

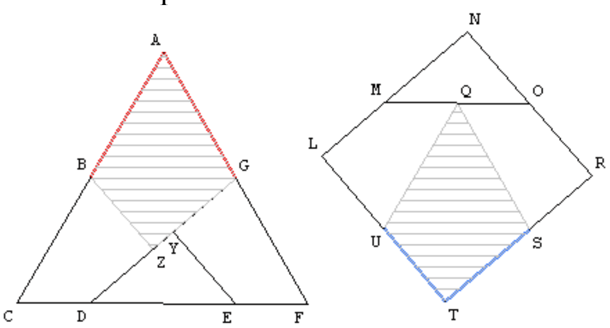


Recherche d'une réponse :

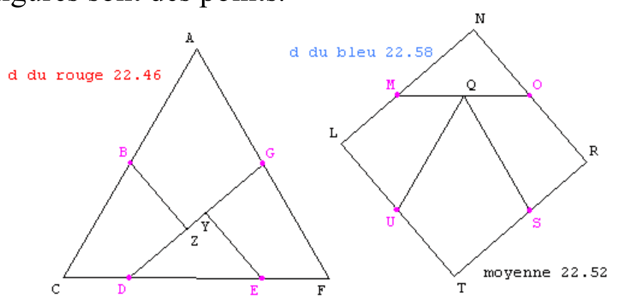
Nous avons d'abord pensé qu'il fallait placer les pieds au barycentre de chacune des quatre pièces. Mais d'autres positions nous ont donné de meilleures valeurs. Le barycentre n'était donc pas la solution à notre problème.



À l'aide de l'ordinateur, nous avons remarqué que pour avoir les plus grandes valeurs, il fallait placer les points sur les côtés « extérieurs ». Par exemple, dans la pièce hachurée ci-dessous, le pied doit se trouver sur les côtés extérieurs rouges pour la table triangulaire et bleus pour la table carrée. Or les seules zones bicolores (bleues et rouges) se réduisent à des points. Ici, les deux seuls points extérieurs communs aux deux configurations sont D et G pour la table triangulaire et correspondent respectivement aux points U et S pour la table carrée.



On procède alors de la même manière pour les autres pièces de la table, et à chaque fois on constate que les zones communes aux deux figures sont des points.



Conclusion :

D'après les résultats ci-dessus, la meilleure solution serait de placer les pieds sur les articulations (les points en rose sur la figure précédente).