La relativité

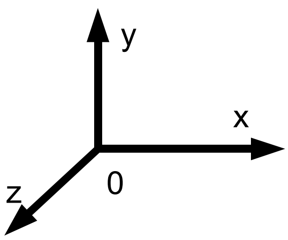
Sujet *MATh.en.JEANS*
du lycée d'Altitude de Briançon
2007/2008

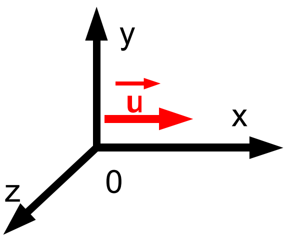
Par Cédric Scanavino, Noëlie Clapasson, Matthieu Flamand et Simon Malfatto élèves de T°S3

PROBLÈME

Passage de la vision galiléenne à la vision lorentzienne

Quand nous avons un repère R' qui se déplace (dans la direction ox à la vitesse $\vec{u}$) dans un repère R, nous obtenons :





$$\begin{cases} x'=x-ut \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=t \end{cases}$$

Pour Galilée, le temps est absolu c'est-à-dire qu'il ne varie pas selon le référentiel choisi.

On s'est aperçu que pour les très grandes vitesse les formules de Galilée ne fonctionnent plus. C'est pourquoi Lorentz propose un facteur de correction gamma indispensable à la véracité des formules physiques lorsqu'on se rapproche de la vitesse de la lumière:

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

où c est la vitesse de la lumière 3.10^8m/s et u la vitesse.

On utilise alors les formules de Lorentz pour définir les variations sur l'axe x seulement, ainsi que dans le temps

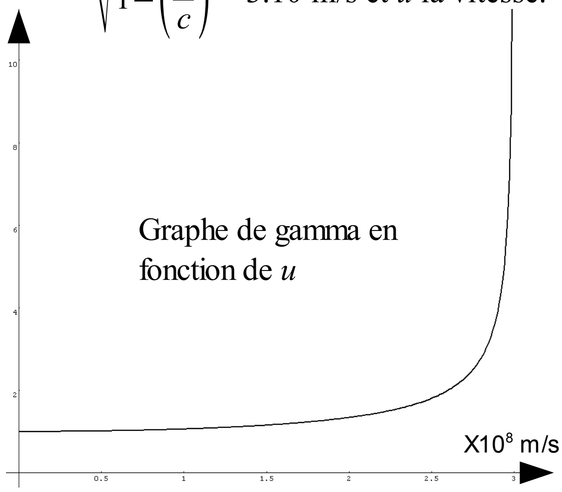
$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}(x-ut)=\gamma(x-ut) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\left(t-\dfrac{u}{c^2}x\right)=\gamma\left(t-\dfrac{u}{c^2}x\right) \end{cases}$$

On a étudié les conséquences de ce changement de repère sur la variable *t* (le temps) et *x* l'espace.

Étude du coefficient γ

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

où c est la vitesse de la lumière 3.10^8m/s et u la vitesse.



Démonstration que $\gamma \geq 1$:

D'après le premier principe de la relativité, on ne peut pas aller plus vite que la vitesse de la lumière, ainsi :

$$0 \leq u \leq c$$

la fonction carrée est croissante sur [0;+∞[

$$0 \leq u^2 \leq c^2$$

$$0 \leq \frac{u^2}{c^2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq \frac{-u^2}{c^2} \geq -1 \Leftrightarrow 1 \geq 1-\frac{u^2}{c^2} \geq 0$$

la fonction racine carrée est croissante sur [0;+∞[

$$1 \geq \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \geq 0$$

la fonction inverse est décroissante sur [0;+∞[

$$1 \leq \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Inverse des transformations de Lorentz

Actuellement nous avons *x*' et *t*' comme fonctions de *x* et *t*, on va chercher à inverser les choses, c'est-à-dire exprimer *x* et *t* en fonction de *x*' et *t*'.

On a $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$ donc $\gamma^2=\frac{1}{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$ et

$$\frac{1}{\gamma^2}=1-\left(\frac{u}{c}\right)^2 \quad (0)$$

- **Inversion de *x*.**

De $t'=\gamma\left(t-\frac{u}{c^2}x\right)$ nous obtenons

$t'=\gamma t-\gamma\frac{u}{c^2}x$ puis $t=\frac{t'}{\gamma}+\frac{u}{c^2}x$ (1)

De $x'=\gamma(x-ut)$ nous obtenons $\gamma x=x'+\gamma u t$ (2)

Dans l'expression (2) on remplace *t* par son expression donné par (1)

$$\gamma x=x'+\gamma u\left(\frac{t'}{\gamma}+\frac{u}{c^2}x\right)\Leftrightarrow x=\frac{x'}{\gamma}+u\left(\frac{t'}{\gamma}+\frac{u}{c^2}x\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{x'}{\gamma}+\frac{ut'}{\gamma}+\frac{u^2}{c^2}x\Leftrightarrow x-\frac{u^2}{c^2}x=\frac{x'}{\gamma}+\frac{ut'}{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow x\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=\frac{x'+ut'}{\gamma}\Leftrightarrow\frac{x}{\gamma^2}=\frac{x'+ut'}{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow x=(x'+ut')\gamma$$

$$\boldsymbol{x=(x'+ut')\gamma}$$

- **Inversion de *t*.**

On a $t'=\gamma t-\gamma\frac{u}{c^2}x$ et $\gamma x=x'+\gamma u t$ (2)

On remplace γx par son expression donnée par (2)

$$t'=\gamma t-\frac{u}{c^2}(x'+\gamma ut)\Leftrightarrow t'+\frac{u}{c^2}x'=\gamma\left(t-\frac{u^2}{c^2}t\right)$$

$$\Leftrightarrow t'+\frac{u}{c^2}x'=t\cdot\gamma\cdot\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)$$

D'après (0), on obtient

$$t'+\frac{u}{c^2}x'=\frac{t}{\gamma}\Leftrightarrow \boldsymbol{t=\gamma t'+\gamma\frac{u}{c^2}x'}$$

- **Conclusion**

$$\begin{cases}x'=\gamma(x-ut)\\ t'=\gamma\left(t-\frac{u}{c^2}x\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\gamma(x'+ut')\\ t=\gamma\left(t'+\frac{u}{c^2}x'\right)\end{cases}$$

Variation de temps

Définitions :

<u>temps propre</u> : un observateur mesure une durée dans le référentiel où il se trouve (temps vécu).

<u>temps impropre</u> : un observateur mesure une durée dans un référentiel différent du sien (temps observé).

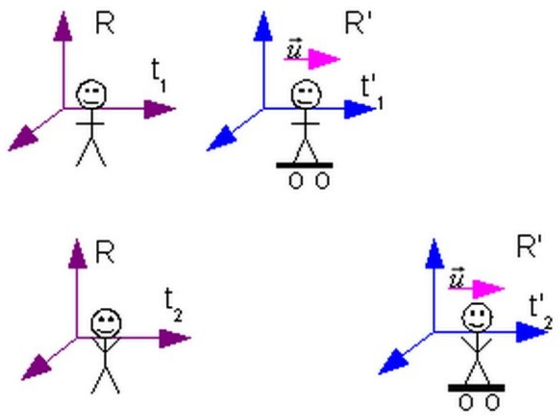
Exemple : nous sommes dans une fusée qui voyage à une vitesse proche de celle de la lumière par rapport à une planète. Le temps que nous passons à manger une pomme sera notre temps propre, celui durant lequel nous verrons un habitant de la planète manger sa pomme sera appelé temps impropre. Si nous voyageons très vite par rapport à la planète, alors notre temps propre sera différent du temps impropre.

On utilise les formules de Lorentz pour montrer une dilatation du temps.

$$\begin{cases}x'=\gamma(x-ut)\\ t'=\gamma\left(t-\frac{u}{c^2}x\right)\end{cases}\quad\text{avec}\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\geq 1$$

Le point de vue utilisé est celui d'une personne qui n'est pas en mouvement dans le repère R (repère fixe)

On pose : $x=0$ ainsi $t_1'=\gamma t_1$ et $t_2'=\gamma t_2$ avec t_1 et t_2 le début et la fin de l'action dans R, et de même pour t_1' et t_2' dans R'



$\Delta t'=t_2'-t_1'=\gamma(t_2-t_1)=\gamma\Delta t$ avec $\gamma\geq 1$ donc $\boldsymbol{\Delta t'\geq\Delta t}$

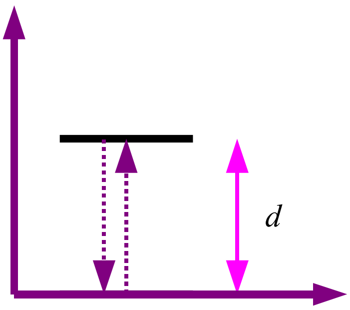
On voit bien qu'il y a **<u>dilatation du temps</u>** lorsque l'on se place dans le référentiel immobile et que l'on observe un référentiel en mouvement puisque l'intervalle de temps entre le début et la fin de l'action dans le référentiel en mouvement est plus grand que celui dans le référentiel immobile.

<u>Application numérique</u> :

on prend une vitesse $u=\frac{1}{2}c=1{,}5.10^{8}\,m.s^{-1}$; une variation de temps Δt=1s dans R et x=0 ainsi
$\Delta t'=\gamma\Delta t=\gamma=1{,}1547$ s

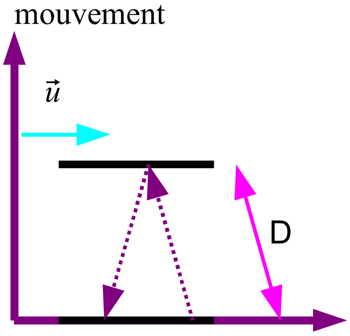
Le temps n'évolue pas de la même manière entre le repère R et le repère R'. Si nous réalisons une action pendant une durée de 1s dans notre référentiel, un observateur dans un autre référentiel en mouvement par rapport à nous verra cette action se passer pendant 1,1547s.
On voit ce phénomène dans le mouvement des satellites, ou même des avions supersoniques qui survolent la terre : ils ont une vitesse qui est différente de celle au sol. Leur référentiel se déplace donc à une vitesse qui diffère un peu de la nôtre. Si l'on met dans ces avions des horloges atomiques qui sont réglées au début exactement à la même heure que celles au sol, après un voyage d'une certaine durée, les deux horloges seront décalées de quelques micro-secondes.

Lumière réfléchie sur deux miroirs :



Observateur à l'extérieur du train : référentiel immobile
Distance parcourue : d
Durée du parcours :
$$\Delta t=\frac{2d}{c}$$

Temps dans le train à très grande vitesse : référentiel en mouvement



Distance parcourue : $2D$
Durée du parcours :
$$\Delta t'=\frac{2D}{c}$$
$$\Delta t'=\frac{2d}{c}\times\gamma$$
$$\Delta t'=\Delta t\times\gamma$$

Variation de distance

On utilise les formules de Lorentz inverses :
$$\begin{cases} x=\gamma(x'+ut') \\ t=\gamma\left(t'+\frac{u}{c^2}x'\right)\end{cases} \quad \text{avec} \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\geq 1$$

On se place toujours dans le repère R pour observer la variation de distance entre R' et R à l'instant t'=0.

On pose $\Delta x=x_2-x_1$ ainsi en remplaçant x_1 et x_2 par leurs expressions selon les équations inverses de Lorentz :
$$\Delta x=\gamma(x_2'+ut')-\gamma(x_1'+ut')=\gamma(x_2'-x_1')=\gamma\,\Delta x'$$
Autrement dit $\Delta x'=\frac{1}{\gamma}\Delta x$ avec $\frac{1}{\gamma}\leq 1$ donc $\boldsymbol{\Delta x'\leqslant\Delta x}$

Ce qui prouve une **<u>contraction des longueurs.</u>** Ainsi si l'on observe un objet qui mesure une longueur x dans son propre référentiel, cette longueur sera observée contractée dans un autre référentiel en mouvement par rapport au premier.

Présentation à l'université de Luminy dans le cadre du projet Hippocampe maths.

Présentation à l'université Paris-Diderot dans le cadre de l'atelier *MATh.en.JEANS*.

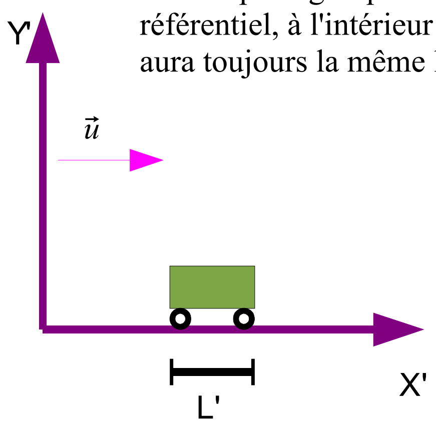
Application numérique :

on prend $u = \frac{1}{2} c = 1{,}50.10^5 m.s^{-1}$ $\Delta x = 1$ m ; $t' = 0$ s

$$\Delta x' = \frac{1}{\gamma} \Delta x = \frac{1}{\gamma} = 0{,}87\, m$$

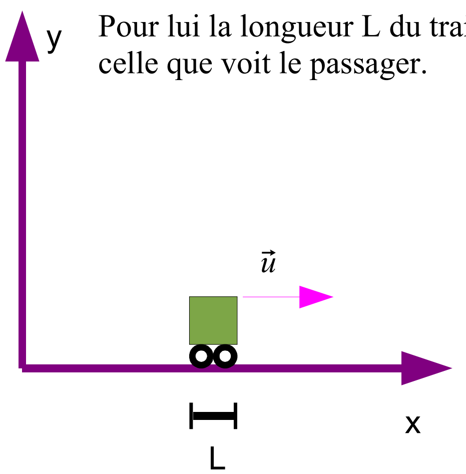
Un train avance à très grande vitesse :

Pour le passager qui se trouve dans ce référentiel, à l'intérieur du train, le train aura toujours la même longueur : L'



Un observateur à l'extérieur voit passer le train.

Pour lui la longueur L du train sera inférieure à celle que voit le passager.



La simultanéité

Deux actions commencent en même temps dans R', l'observateur se trouve dans R.

On prend : $t_1'=t_2'$ et $x_1' \neq x_2'$

$$t_1 = \gamma\left(t'_1 + \frac{u}{c^2} x'_1\right)$$

$$t_2 = \gamma\left(t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_2\right)$$

$$\Delta t = \gamma\left(t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_2 - t'_1 - \frac{u}{c^2} x'_1\right)$$

$$\Delta t = \gamma\left(\frac{u}{c^2}\right)(x'_2 - x'_1)$$

$$\Delta t = \gamma\left(\frac{u}{c^2}\right)\Delta x'$$

Ce résultat nous montre que les deux actions qui commencent en même temps dans R' ne sont pas observées en même temps dans R.