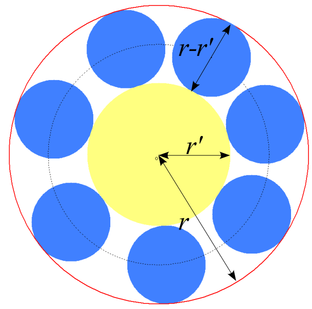
Roulement à billes
par Muller Marianne, Bert Laetitia et Bichon Adélaïde
Lycée d'Altitude de Briançon

Sujet :
Pour monter un roulement à billes on dispose de deux cercles (de rayons r et r').
On les décentre pour disposer les billes dans la lune ainsi formée, puis on répartit les billes entre les deux cercles.
Problème : combien peut-on mettre de billes dans la lune en fonction de r et r' ?

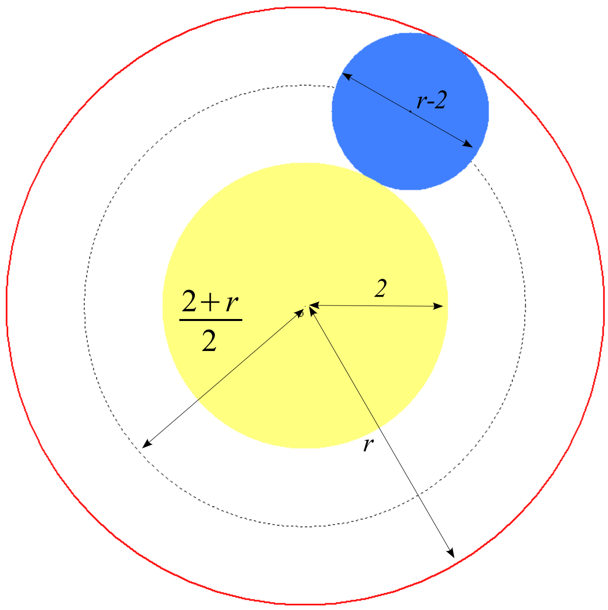


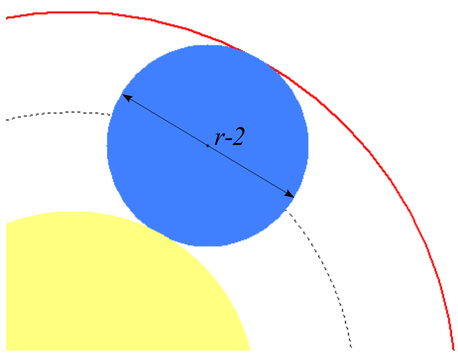



Il est facile de remarquer que le diamètre des billes sera r-r'. Étant donné que nous avions trop de paramètres à gérer, nous avons fixé r'=2.

Premier essai :
Nous calculons le périmètre du cercle « intermédiaire » qui est de rayon $\frac{2+r}{2}$

Nous obtenons comme périmètre
$$p=2\pi\frac{r+2}{2}=\pi(r+2)$$

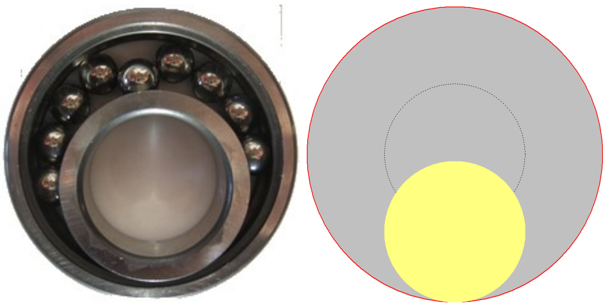




Nous pouvons diviser ce périmètre par le diamètre d'une bille, qui est à peu près égal à « l'espace » qu'occupe une bille sur ce périmètre, nous obtenons $\pi\frac{(r+2)}{(r-2)}$ qui est le maximum de billes que l'on peut mettre entre les deux cercles.

PREMIER MAJORANT : au maximum, nous pouvons mettre $\pi\frac{(r+2)}{(r-2)}$ billes.

Deuxième essai :



Nous calculons l'aire de la lune qui est obtenue quand on décentre le cercle.
Cette aire correspond à l'aire du grand disque moins l'aire du petit soit $\pi r^2 - \pi r'^2 = \pi(r^2-4)$.
Nous savons aussi que l'aire des billes est

$$\pi\left(\frac{r-2}{2}\right)^2$$

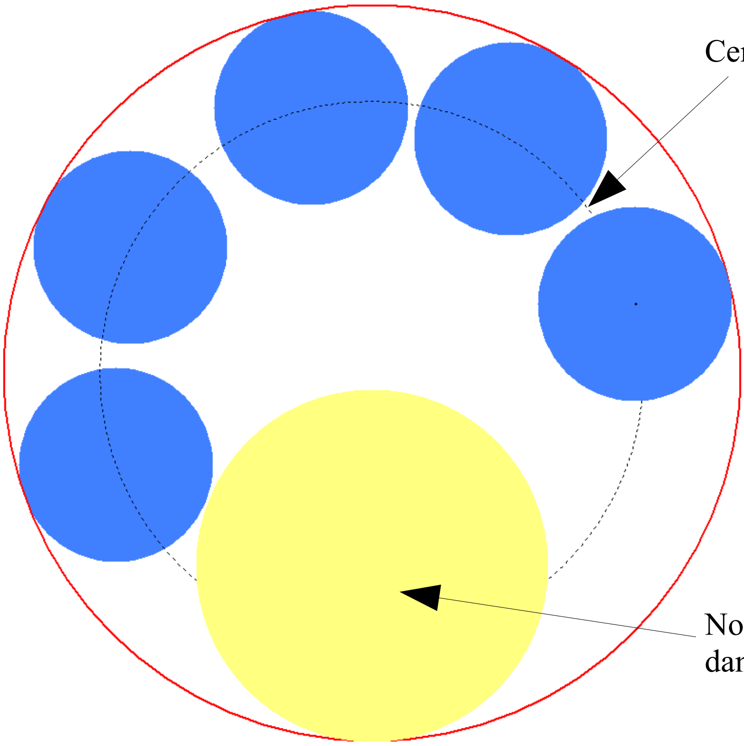
Donc le nombre maximum de billes que nous pouvons introduire est

$$\frac{\pi(r^2-4)}{\pi\left(\frac{r-2}{2}\right)^2} = 4\frac{r^2-4}{(r-2)^2} = 4\frac{(r-2)(r+2)}{(r-2)^2} = 4\frac{(r+2)}{(r-2)}$$

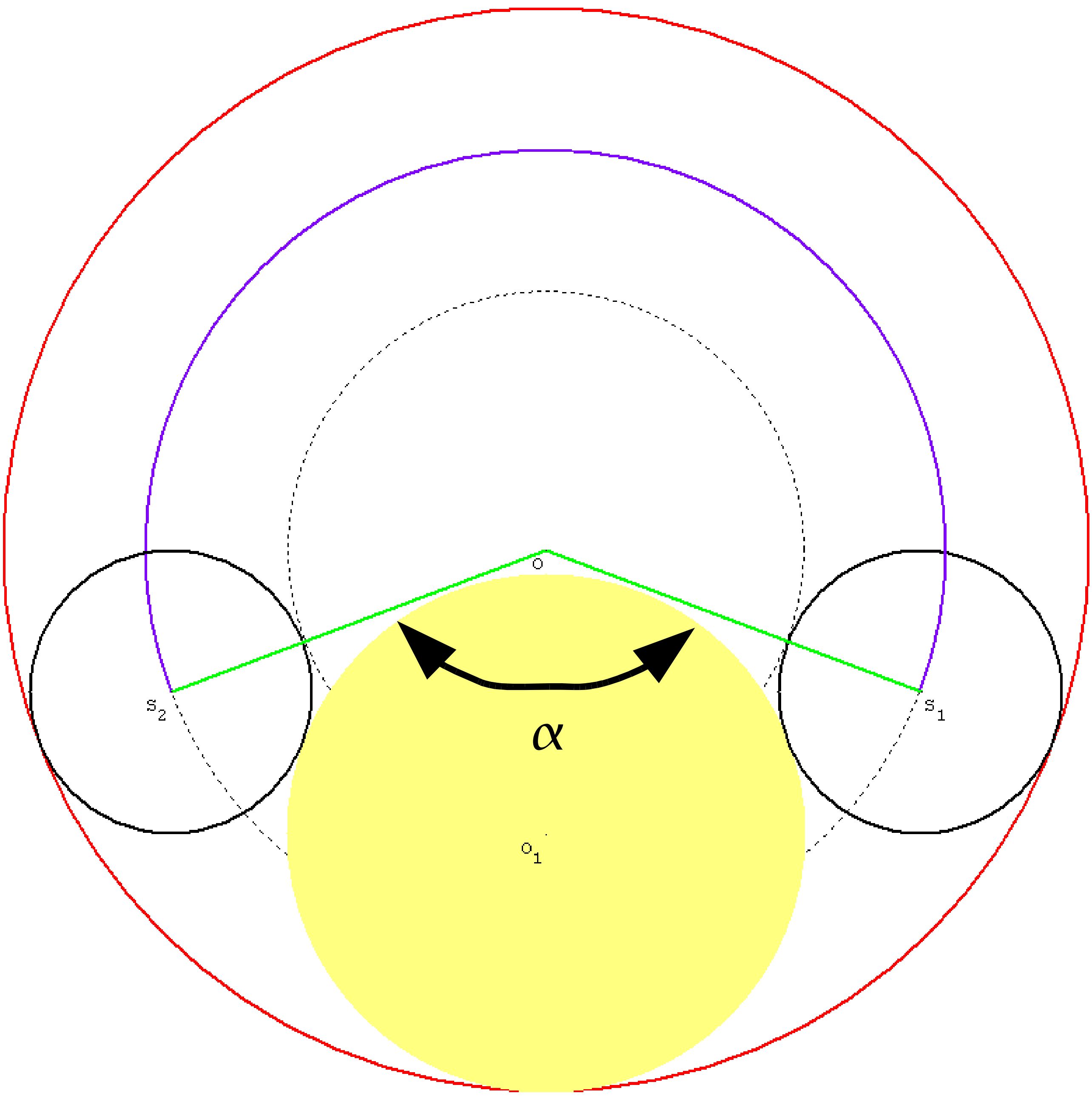
DEUXIÈME MAJORANT : au maximum, nous pouvons mettre $4\frac{(r+2)}{(r-2)}$ billes. Ce deuxième majorant est moins bon que le premier.

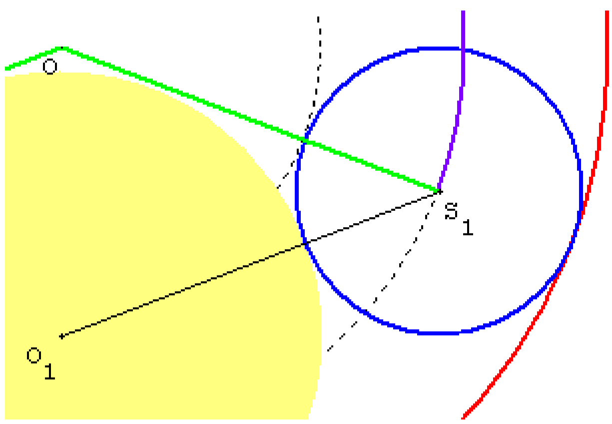
Troisième essai :

Quand nous plaçons les billes, nous commençons par les mettre sur le cercle dit « intermédiaire » (voir le premier essai), mais la position du cercle intérieur nous empêche de répartir les billes sur tout le cercle intermédiaire.



Nous avons ainsi cherché à diminuer le périmètre du cercle intermédiaire, en prenant seulement l'arc où nous pouvons placer une bille (arc en mauve sur le dessin ci-dessous).
Pour cela nous avons calculé l'angle $\alpha = \widehat{S_2 O S_1}$ (voir dessin ci-dessous).



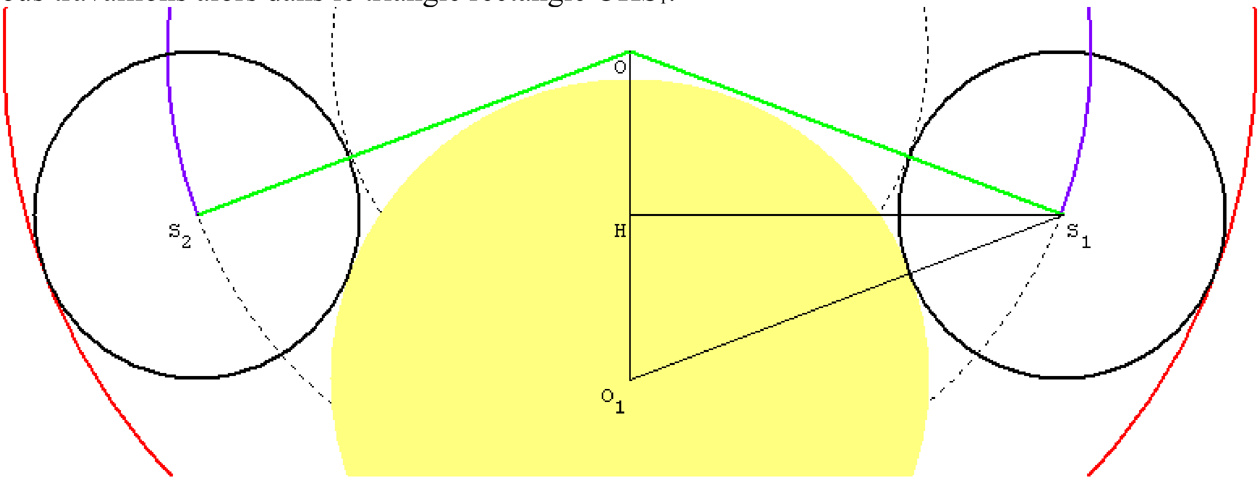


Comment obtient-on les cercles tangents, c'est-à-dire les cercles s_1 et s_2 ?
Ces cercles (ils sont symétriques par rapport à l'axe OO_1) ont leur centre sur le cercle intermédiaire et ils doivent être tels que OS_1 soit égal à

$$O_1S_1 = 2 + \frac{(r'-2)}{2}$$ (rayon des billes bleues) car

les cercles (jaune et bleu) sont tangents.

Nous remarquons que $OS_1 = \frac{r+2}{2}$ est le rayon du cercle intermédiaire et que $O_1S_1 = 2 + \frac{r-2}{2} = \frac{r+2}{2}$ car la bille de centre S_1 de rayon $\frac{r+2}{2}$ est tangente à la bille jaune de rayon 2. Ainsi le triangle OO_1S_1 est isocèle en S_1.
D'autre part, la distance OO_1 correspond au déplacement du cercle jaune pour introduire les billes, ce qui représente r-2.
Nous travaillons alors dans le triangle rectangle OHS_1.



$\cos(\widehat{HOS_1}) = \frac{OH}{OS_1} = \frac{\frac{r-2}{2}}{\frac{r+2}{2}} = \frac{r-2}{r+2}$. Ainsi $\alpha = 2 \times \cos^{-1}\left(\frac{r-2}{r+2}\right)$ et l'angle mauve qui nous intéresse vaut 2π-2α.

Ce qui donne comme longueur de l'arc $OS_1 \times (2\pi - \alpha) = \frac{r+2}{2} \times (2\pi - \alpha)$.

Sur cet arc, on considère qu'une bille occupe la taille de son diamètre, comme lors de la première majoration. Ainsi on pourra mettre au plus $\frac{\frac{r+2}{2}(2\pi - \alpha)}{r-2} = (\pi - \frac{\alpha}{2}) \frac{r+2}{r-2}$ billes. En effet, il est possible de mettre une bille (ou deux) à l'emplacement du cercle jaune à l'origine.

PREMIER MINORANT : au minimum, nous pouvons mettre $(\pi - \frac{\alpha}{2}) \frac{(r+2)}{(r-2)}$ billes.

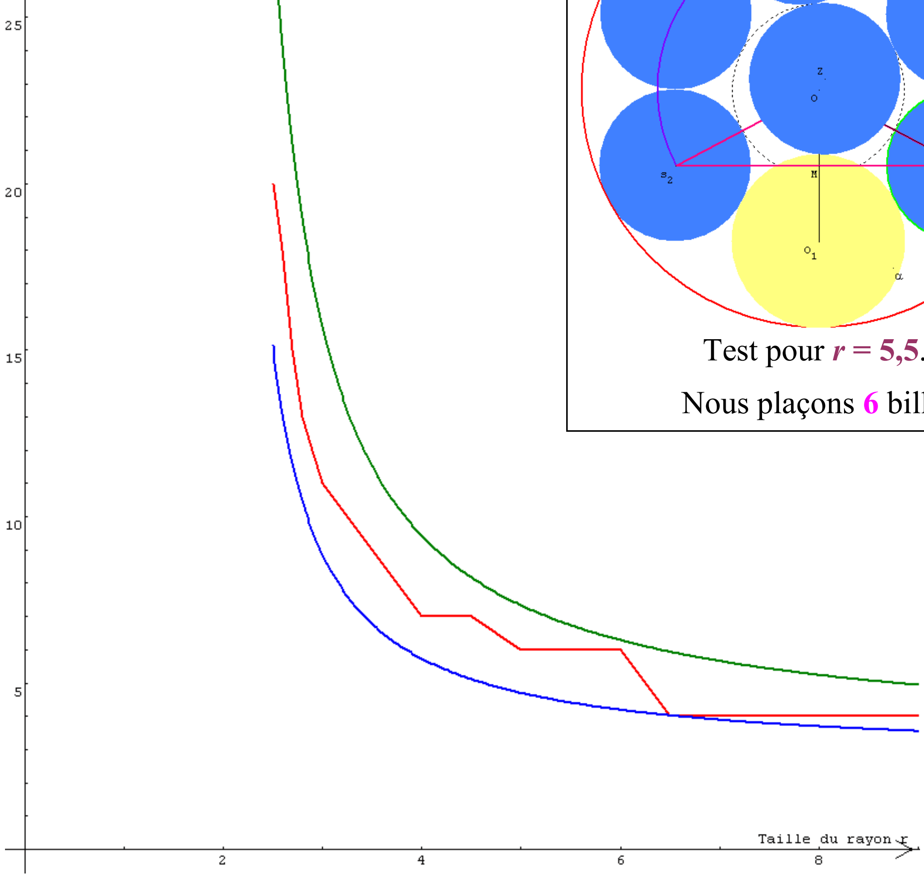
<u>Méthode expérimentale</u> :

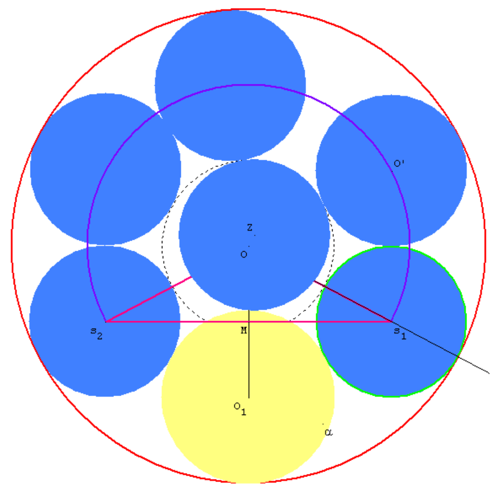
Avec l'aide du logiciel *Géoplan*, nous avons placé expérimentalement le maximum de billes que nous pouvions mettre en fonction de *r* (voir cadre si dessous).

Voici nos résultats :

Taille de *r*	**Nombre de billes**	Nombre de billes minorant (formule 3)	Nombre de billes majorant (formule 1)
2,5	20	15,14	28,27
2,6	18	13,05	24,09
2,7	15	11,55	21,09
2,8	13	10,43	18,85
2,9	12	9,56	17,1
3	11	8,86	15,71
3,5	9	6,77	11,52
4	7	5,73	9,42
4,5	7	5,11	8,17
5	6	4,7	7,33
5,5	**6**	4,41	6,73
6	6	4,19	6,28
6,5	4	4,02	5,93
7	4	3,89	5,65
7,5	4	3,78	5,43
8	4	3,69	5,24
8,5	4	3,62	5,07
9	4	3,55	4,94

Voici ces même valeurs mises sous forme graphique :

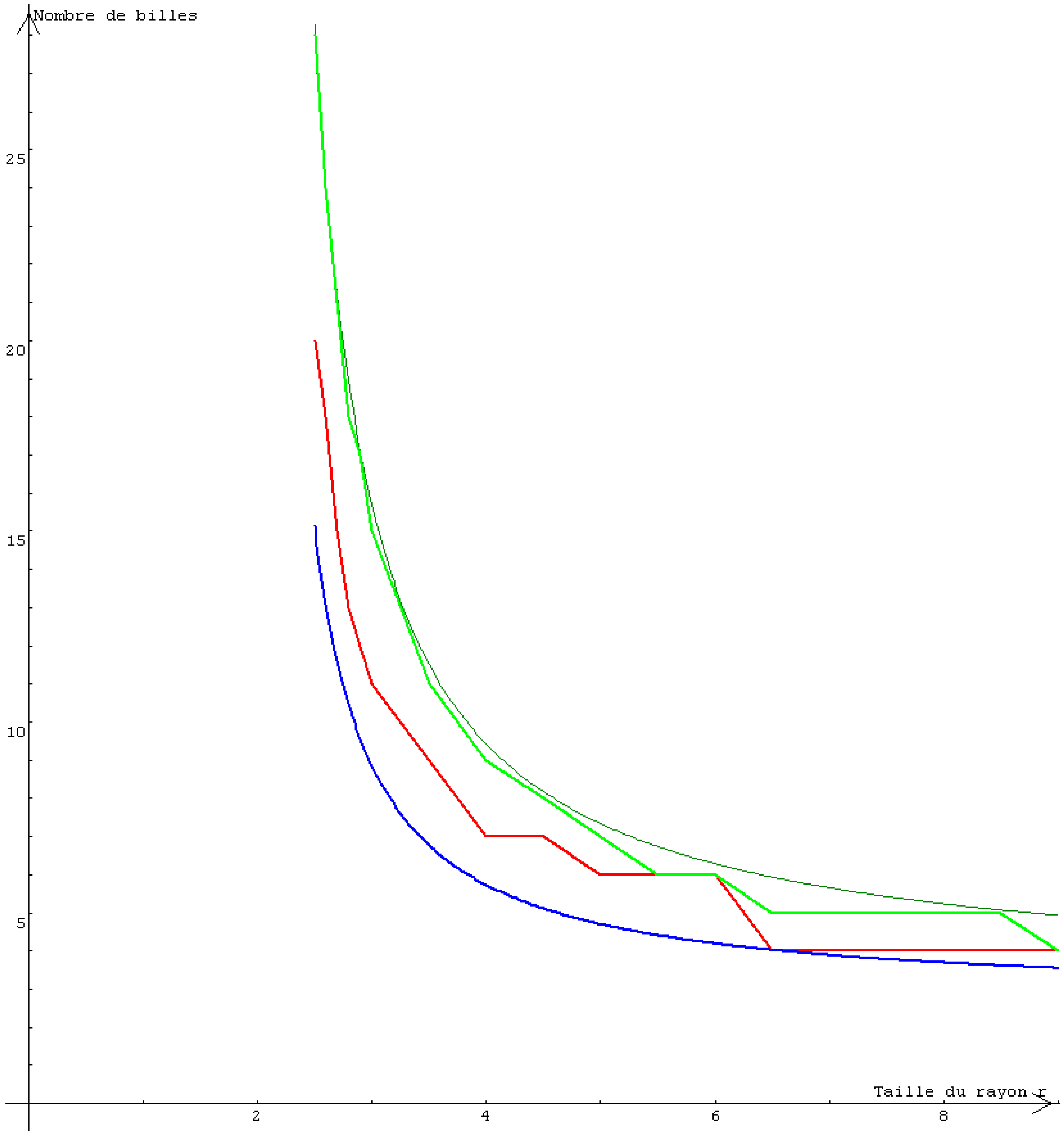




Test pour ***r* = 5,5**.

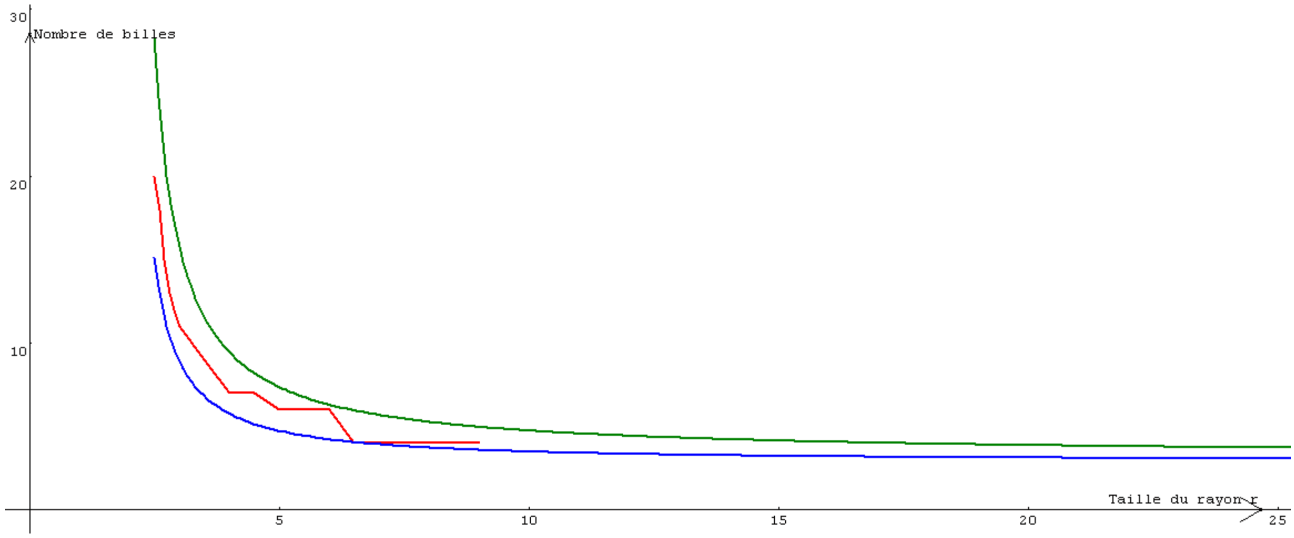
Nous plaçons **6** billes

Lorsque nous calculons le nombre de billes majorant, nous obtenons des nombres à virgule. Une bille ne pouvant être qu'entière, il faut arrondir les valeurs obtenues au nombre entier inférieur. Nous obtenons ainsi le graphique suivant.



Comportement des formules à la limite :

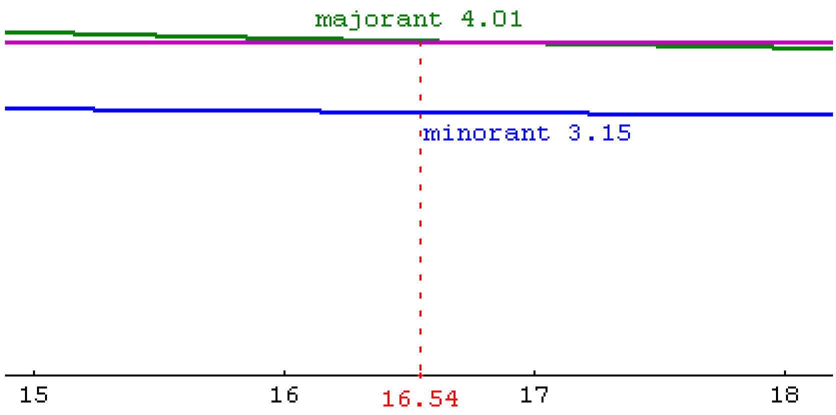
Toujours avec le logiciel *Géoplan*, nous avons prolongé nos formules d'encadrement.

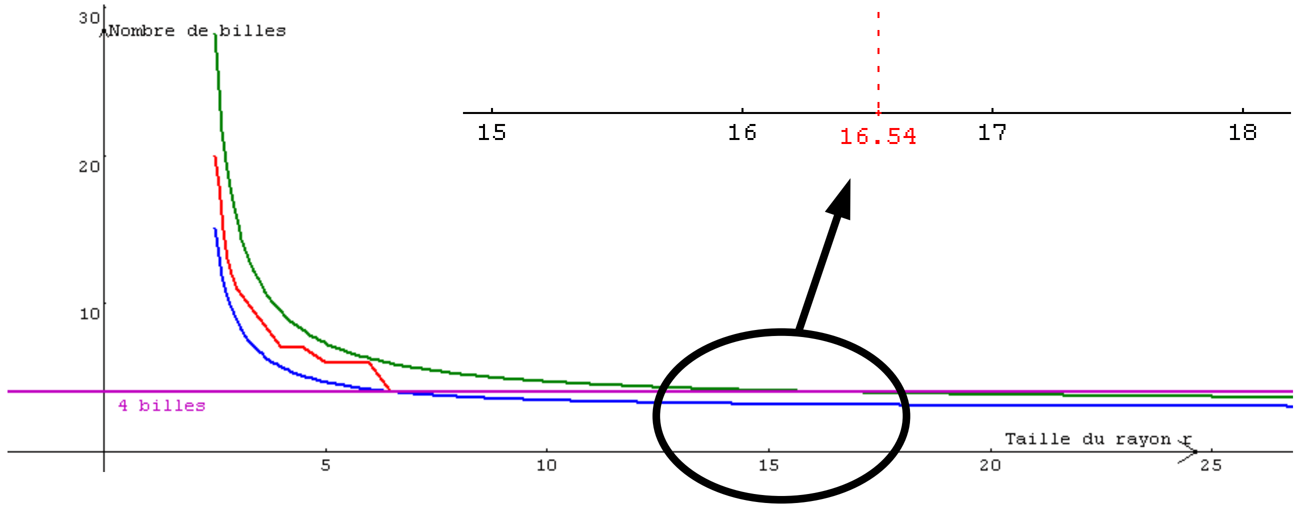


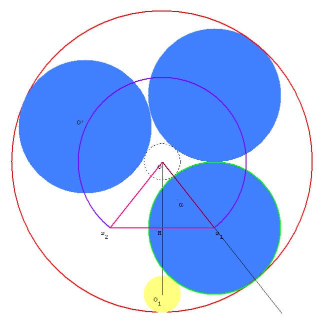
Nous avons remarqué que la droite violette (qui correspond à 4 billes) passe au dessus de la courbe verte (aux alentours de r = 16,5).

Cela signifie que nous pouvons mettre moins de quatre billes dans un roulement.

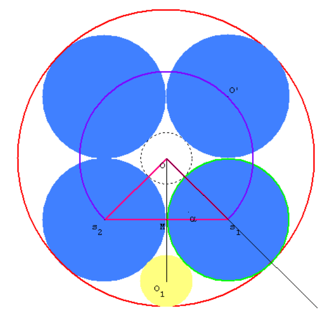
Par contre la courbe bleue est toujours au dessus de trois. Autrement dit, nous ne pouvons pas mettre moins de trois billes.







Test pour r = 16,5



Test pour r = 11,5