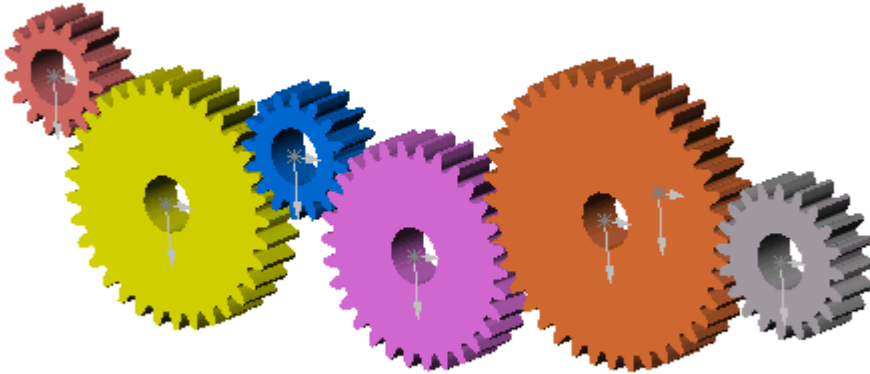


LES ENGRENAGES

Par Laetitia BERT, Adélaïde BICHON, Eva DUEZ, Florence HUCHON & Soazig LELIGNÉ élèves de première et terminale S du Lycée d'Altitude de Briançon

Sujet :

On dispose d'engrenages ayant entre 15 et 30 dents, et on souhaite réaliser un montage (avec le minimum d'engrenages) de rapport 6,55957. Comment peut-on faire?



Exemples de rapports :

- Rapport 2 (et 1/2)

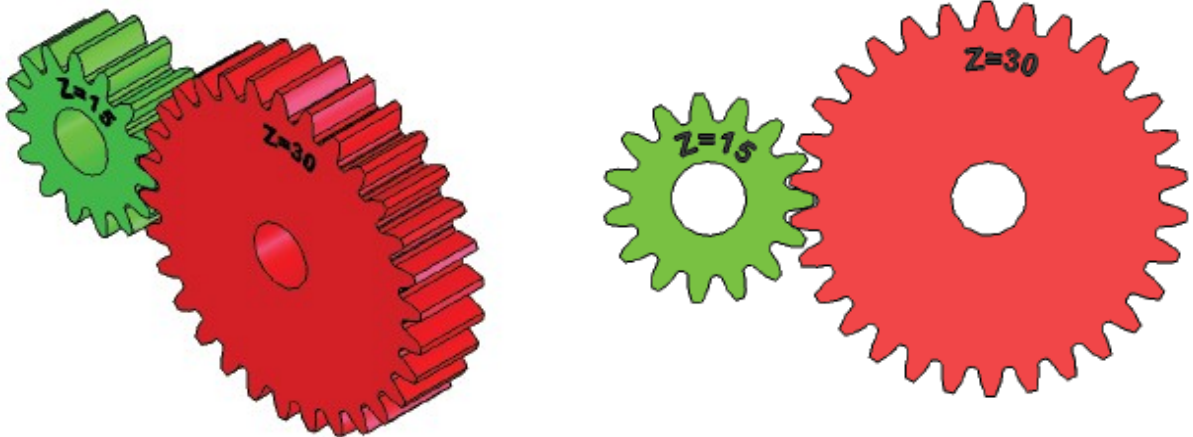
Si l'on dispose les deux engrenages à 15 et 30 dents à la suite nous obtenons un rapport de

$$\frac{\text{nombre de dents roue 1}}{\text{nombre de dents roue 2}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Autrement dit quand la roue 1 fait 3 tours, la roue 2 en fera $\frac{1}{2} \times 3 = 1,5$ tours.

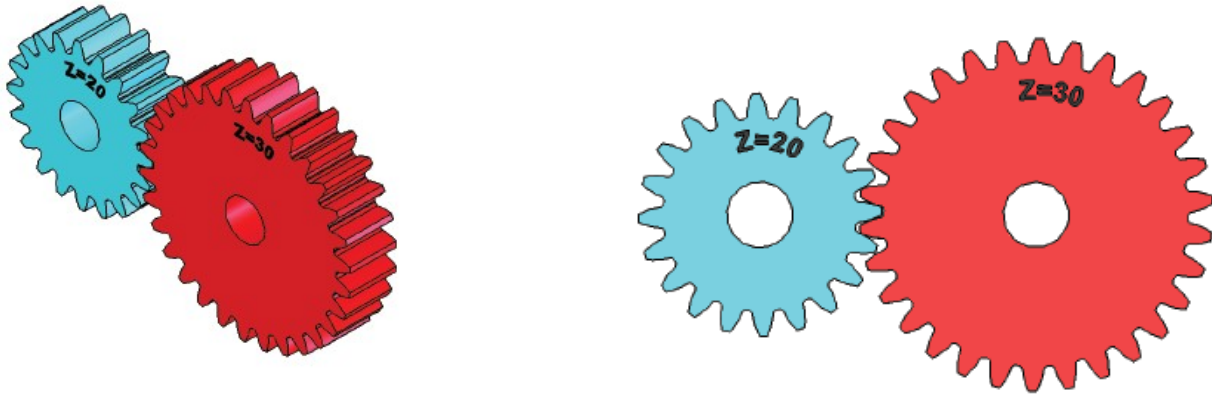
Remarque : inversement quand la roue 2 fera 3 tours, la roue 1 fera $2 \times 3 = 6$ tours.

Ce qui veut dire que si on sait faire le rapport k , on sait faire le rapport $\frac{1}{k}$



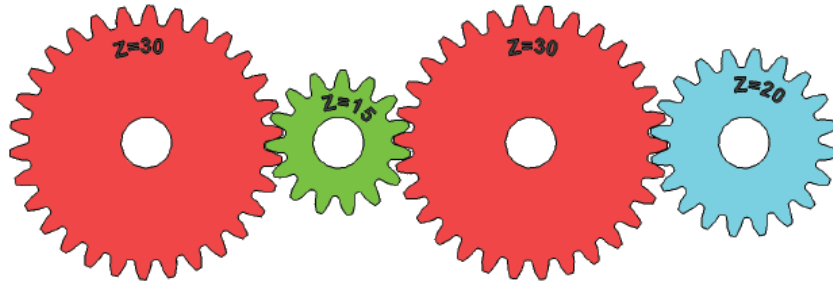
● Rapport 3/2 et 2/3

En mettant à la suite les engrenages à 20 dents puis à 30 dents, le rapport sera alors $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ et si on fait marcher dans l'autre sens (c'est-à-dire 30 dents puis 20 dents) on obtient $\frac{3}{2}$



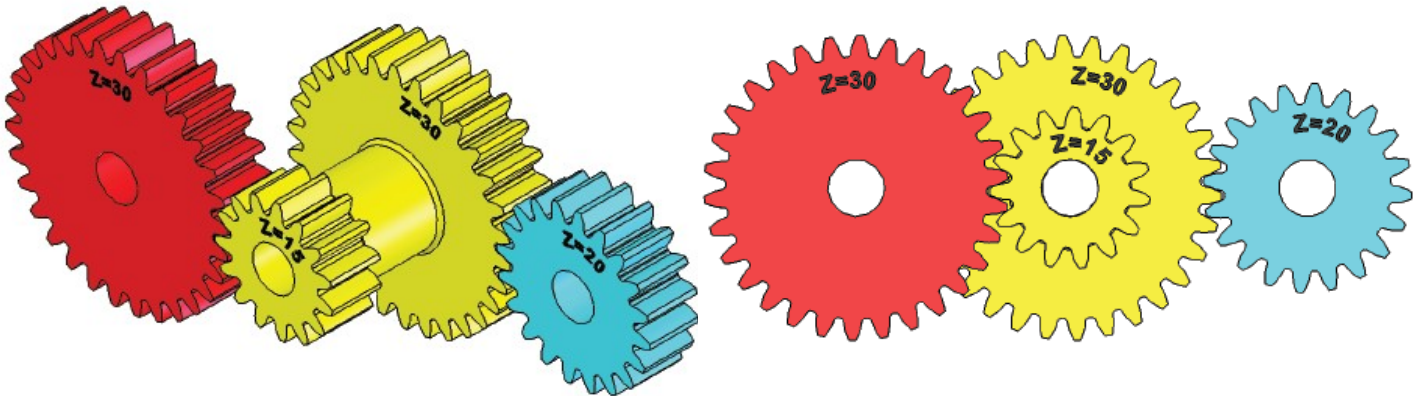
● Rapport 3 (et 1/3)

Si on place les engrenages à la suite 30, 15, 30 et 20 on va avoir le rapport $\frac{30}{15} \times \frac{15}{30} \times \frac{30}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$



Les engrenages du centre ne servent à rien, ils ne font que transmettre.

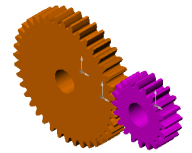
Par contre si on réalise le montage suivant (avec un arbre), on obtient le rapport $\frac{30}{15} \times \frac{30}{20} = 2 \times 1,5 = 3$



Finalement notre sujet consiste à écrire 6,55957 comme produit de fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers compris entre 15 et 30.

Première piste de recherche :

Nous réalisons sous forme de tableau tous les quotients possibles (c'est-à-dire les rapports) en plaçant seulement deux engrenages.



	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
15	1,000000	0,937500	0,882353	0,833333	0,789474	0,750000	0,714286	0,681818	0,652174	0,625000	0,600000	0,576923	0,555556	0,535714	0,517241	0,500000
16	1,066667	1,000000	0,941176	0,888889	0,842105	0,800000	0,761905	0,727273	0,695652	0,666667	0,640000	0,615385	0,592593	0,571429	0,551724	0,533333
17	1,133333	1,062500	1,000000	0,944444	0,894737	0,850000	0,809524	0,772727	0,739130	0,708333	0,680000	0,653846	0,629630	0,607143	0,586207	0,566667
18	1,200000	1,125000	1,058824	1,000000	0,947368	0,900000	0,857143	0,818182	0,782609	0,750000	0,720000	0,692308	0,666667	0,642857	0,620690	0,600000
19	1,266667	1,187500	1,117647	1,055556	1,000000	0,950000	0,904762	0,863636	0,826087	0,791667	0,760000	0,730769	0,703704	0,678571	0,655172	0,633333
20	1,333333	1,250000	1,176471	1,111111	1,052632	1,000000	0,952381	0,909091	0,869565	0,833333	0,800000	0,769231	0,740741	0,714286	0,689655	0,666667
21	1,400000	1,312500	1,235294	1,166667	1,105263	1,050000	1,000000	0,954545	0,913043	0,875000	0,840000	0,807692	0,777778	0,750000	0,724138	0,700000
22	1,466667	1,375000	1,294118	1,222222	1,157895	1,100000	1,047619	1,000000	0,956522	0,916667	0,880000	0,846154	0,814815	0,785714	0,758621	0,733333
23	1,533333	1,437500	1,352941	1,277778	1,210526	1,150000	1,095238	1,045455	1,000000	0,958333	0,920000	0,884615	0,851852	0,821429	0,793103	0,766667
24	1,600000	1,500000	1,411765	1,333333	1,263158	1,200000	1,142857	1,090909	1,043478	1,000000	0,960000	0,923077	0,888889	0,857143	0,827586	0,800000
25	1,666667	1,562500	1,470588	1,388889	1,315789	1,250000	1,190476	1,136364	1,086957	1,041667	1,000000	0,961538	0,925926	0,892857	0,862069	0,833333
26	1,733333	1,625000	1,529412	1,444444	1,368421	1,300000	1,238095	1,181818	1,130435	1,083333	1,040000	1,000000	0,962963	0,928571	0,896552	0,866667
27	1,800000	1,687500	1,588235	1,500000	1,421053	1,350000	1,285714	1,227273	1,173913	1,125000	1,080000	1,038462	1,000000	0,964286	0,931034	0,900000
28	1,866667	1,750000	1,647059	1,555556	1,473684	1,400000	1,333333	1,272727	1,217391	1,166667	1,120000	1,076923	1,037037	1,000000	0,965517	0,933333
29	1,933333	1,812500	1,705882	1,611111	1,526316	1,450000	1,380952	1,318182	1,260870	1,208333	1,160000	1,115385	1,074074	1,035714	1,000000	0,966667
30	2,000000	1,875000	1,764706	1,666667	1,578947	1,500000	1,428571	1,363636	1,304348	1,250000	1,200000	1,153846	1,111111	1,071429	1,034483	1,000000

Dans ce tableau de rapports, nous avons repéré les rapports avec un chiffre après la virgule. Nous avons fait un nouveau tableau des quotients avec ces valeurs ainsi qu'un tableau des produits.

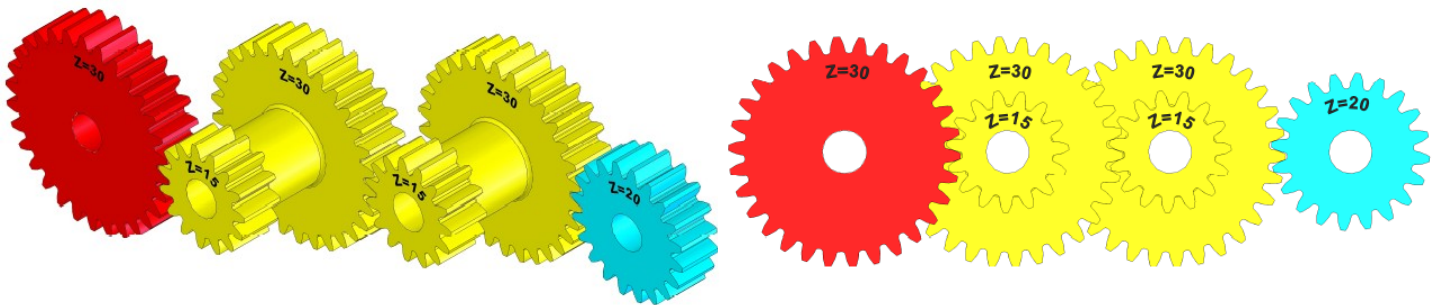
/	2	1,8	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
2	1	1,11	1,25	1,33	1,43	1,54	1,67	1,82	2,22	2,5	2,86	3,33	4
1,8	0,9	1	1,13	1,2	1,29	1,38	1,5	1,64	2	2,25	2,57	3	3,6
1,6	0,8	0,89	1	1,07	1,14	1,23	1,33	1,45	1,78	2	2,29	2,67	3,2
1,5	0,75	0,83	0,94	1	1,07	1,15	1,25	1,36	1,67	1,88	2,14	2,5	3
1,4	0,7	0,78	0,88	0,93	1	1,08	1,17	1,27	1,56	1,75	2	2,33	2,8
1,3	0,65	0,72	0,81	0,87	0,93	1	1,08	1,18	1,44	1,63	1,86	2,17	2,6
1,2	0,6	0,67	0,75	0,8	0,86	0,92	1	1,09	1,33	1,5	1,71	2	2,4
1,1	0,55	0,61	0,69	0,73	0,79	0,85	0,92	1	1,22	1,38	1,57	1,83	2,2
0,9	0,45	0,5	0,56	0,6	0,64	0,69	0,75	0,82	1	1,13	1,29	1,5	1,8
0,8	0,4	0,44	0,5	0,53	0,57	0,62	0,67	0,73	0,89	1	1,14	1,33	1,6
0,7	0,35	0,39	0,44	0,47	0,5	0,54	0,58	0,64	0,78	0,88	1	1,17	1,4
0,6	0,3	0,33	0,38	0,4	0,43	0,46	0,5	0,55	0,67	0,75	0,86	1	1,2
0,5	0,25	0,28	0,31	0,33	0,36	0,38	0,42	0,45	0,56	0,63	0,71	0,83	1

Nous ne sommes pas arrivés au rapport 6,55957 mais nous sommes en mesure d'enrichir considérablement la liste des valeurs « autorisées ».

x	2	1,8	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
2	4	3,6	3,2	3	2,8	2,6	2,4	2,2	1,8	1,6	1,4	1,2	1
1,8	3,6	3,24	2,88	2,7	2,52	2,34	2,16	1,98	1,62	1,44	1,26	1,08	0,9
1,6	3,2	2,88	2,56	2,4	2,24	2,08	1,92	1,76	1,44	1,28	1,12	0,96	0,8
1,5	3	2,7	2,4	2,25	2,1	1,95	1,8	1,65	1,35	1,2	1,05	0,9	0,75
1,4	2,8	2,52	2,24	2,1	1,96	1,82	1,68	1,54	1,26	1,12	0,98	0,84	0,7
1,3	2,6	2,34	2,08	1,95	1,82	1,69	1,56	1,43	1,17	1,04	0,91	0,78	0,65
1,2	2,4	2,16	1,92	1,8	1,68	1,56	1,44	1,32	1,08	0,96	0,84	0,72	0,6
1,1	2,2	1,98	1,76	1,65	1,54	1,43	1,32	1,21	0,99	0,88	0,77	0,66	0,55
0,9	1,8	1,62	1,44	1,35	1,26	1,17	1,08	0,99	0,81	0,72	0,63	0,54	0,45
0,8	1,6	1,44	1,28	1,2	1,12	1,04	0,96	0,88	0,72	0,64	0,56	0,48	0,4
0,7	1,4	1,26	1,12	1,05	0,98	0,91	0,84	0,77	0,63	0,56	0,49	0,42	0,35
0,6	1,2	1,08	0,96	0,9	0,84	0,78	0,72	0,66	0,54	0,48	0,42	0,36	0,3
0,5	1	0,9	0,8	0,75	0,7	0,65	0,6	0,55	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25

Par exemple, c'est ainsi que nous avons fait le rapport 3 et nous sommes en mesure de faire le rapport 6 car $6=2 \times 3$ et 2 et 3 sont réalisables.

Rapport 6 : Engrenage 30/15 couplé avec 30/15 et 30/20



Deuxième piste de recherche :

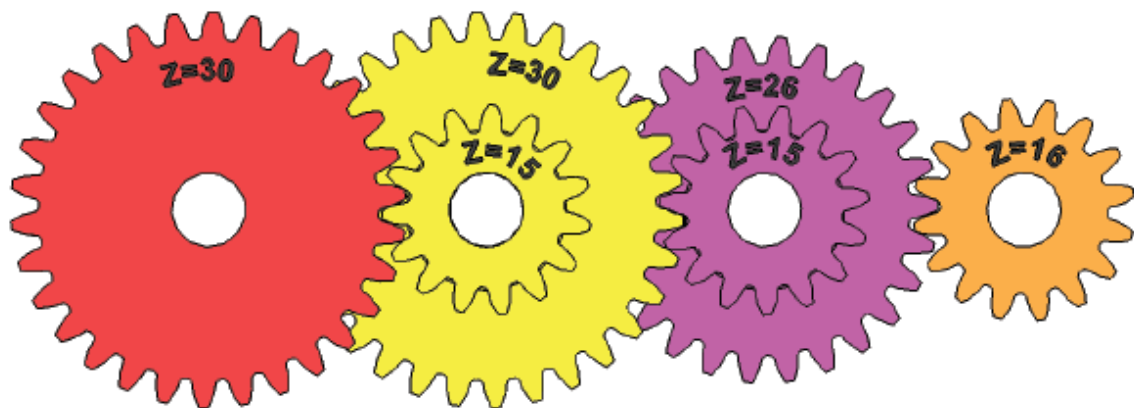
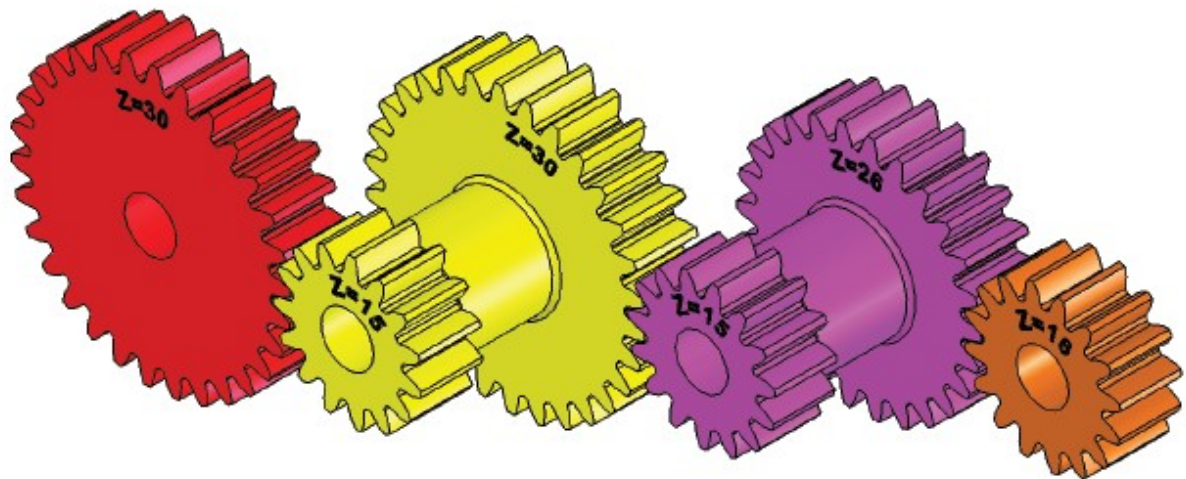
Vu que nous n'arrivons pas à obtenir 6,55957, pouvons-nous nous en approcher?

Nous avons vu que nous pouvons faire 6, mais peut-on réaliser le rapport 6,5 ?

En testant les différentes valeurs que nous sommes capables de réaliser, nous avons constaté que

$2 \times 2 \times 1,625 = 6$ or les valeurs 2 et $1,625 = \frac{26}{16}$ sont réalisables.

Rapport 6,5 : 30/15-30/15-26/16

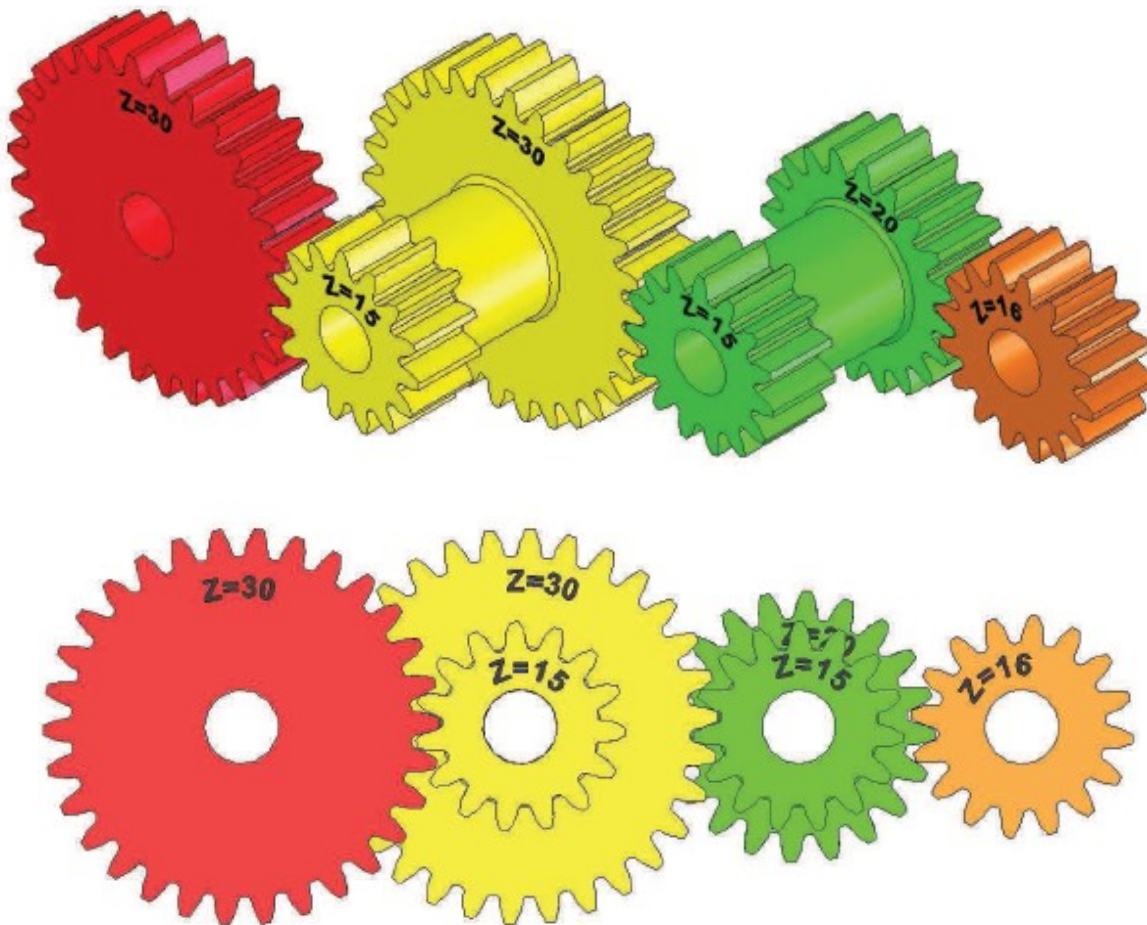


Nous avons cherché 6,55 mais pour le moment nous n'avons rien trouvé.

Troisième piste de recherche :

Nous avons $6,55957 = \frac{655957}{100000} = \frac{769 \times 853}{2^5 \times 5^5}$, il nous reste à faire 2 (déjà fait), 5, 769 et 853.

Rapport 5 : Nous avons $5 = 4 \times 1,25$ donc il suffit de monter 30/15-30/15-20/16



Pour 769 et 853, nous avons commencé par chercher les autres nombres premiers.

Nombre premier	2	3	5	7	11	13
Rapport	$\frac{30}{15}$	$\frac{30}{15} \times \frac{30}{20}$	$\frac{30}{15} \times \frac{30}{15} \times \frac{20}{16}$	$\frac{30}{15} \times \frac{30}{15} \times \frac{28}{16}$	$\frac{30}{15} \times \frac{30}{15} \times \frac{30}{15} \times \frac{22}{16}$	$\frac{26}{20} \times \frac{30}{15} \times \frac{30}{20} \times \frac{30}{20} \times \frac{20}{16}$

Par exemple, pour trouver le rapport 7 : On a fait $7/2=3,5$ qui n'est pas dans notre tableau. Alors on redivise par 2 la valeur $3,5/2=1,75$ qui est le rapport $28/16$ de notre tableau. Ainsi $7=2 \times 2 \times 1,75 = \frac{30}{15} \times \frac{30}{15} \times \frac{28}{16}$

Cette méthode de diviser par 2 a toujours bien marché, peut-on la généraliser ?

Pour 17 (et tous les nombres premiers entre 15 et 30), on a remarqué que $17 = \frac{17}{2} \times 2$, autrement dit, on réalise le rapport 17 ainsi : 15/30-30/15-17.

Mais en fait il faut avoir uniquement des rapports, sinon notre montage ne « marche » pas.

Nous avons repris nos recherches pour 17 et nous avons obtenu : $17 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \frac{17}{16}$

De même $19 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \frac{19}{16}$, $23 = 16 \times \frac{23}{16}$ et 29

Nos recherches ont buté sur 31, le premier nombre premier au-dessus de 30.

Clôture des recherches :

A force de rechercher le rapport 31 nous avons douté de la possibilité de le réaliser.

On a regardé comment il faudrait le réaliser, en décomposant chacun des engrenages en produit de nombres premiers.

Cette démarche nous a permis de montrer que 31 est irréalisable, en effet :

Supposons que nous arrivions à écrire $31 = \frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \dots \times \frac{a_n}{b_n}$ avec chacun des a_i et b_i entre 15 et 30.

Si on décompose ces nombres en produit de nombres premiers, on arrive à $31 = \frac{2^{k_1} 3^{k_2} \dots 29^{k_{10}}}{2^{k_1} 3^{k_2} \dots 29^{k_{10}}}$ avec les nombres premiers inférieurs à 31 qui se simplifient. Or les nombres a_i et b_i que nous avons décomposés étant inférieur à 30, le nombre 31 ne peut pas apparaître dans la décomposition.

Autrement dit on n'arrive pas à écrire 31 comme produit de rapport de valeurs entières entre 15 et 30.

Ainsi nous n'arriverons jamais à réaliser le rapport 6,55957 avec des engrenages ayant entre 15 et 30 dents.

La question se pose maintenant de savoir quel rapport le plus proche de 6,55957 on peut arriver à obtenir.