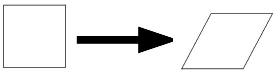
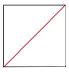
Les échafaudages

Par DUMAY Robin, DONA Roman, MAURIN Baptiste et JAVENEAU Clément
élèves de seconde 5 du lycée d'Altitude de Briançon.

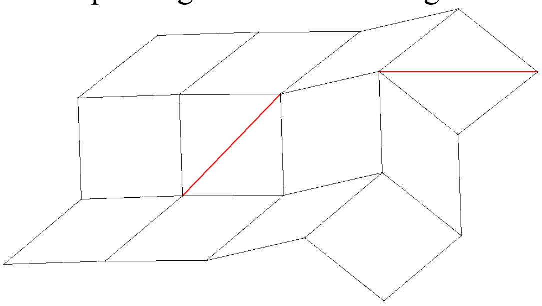
Enseignant : Hubert PROAL
Chercheur : Camille PETIT (Institut Fourier de Grenoble)

Sujet :
On s'intéresse à un échafaudage (ou un grillage) de taille *m* x *n* dans le plan.
Il est constitué de losanges de barres articulées pouvant se déformer :



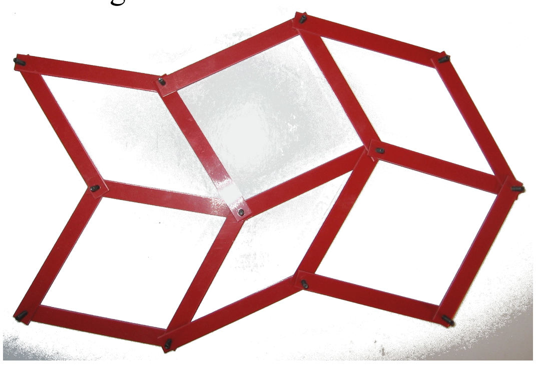
On peut rigidifier un carré en lui ajoutant une barre diagonale : 

On se pose deux questions :
1) combien de barres diagonales faut-il au minimum pour rigidifier l'échafaudage ?



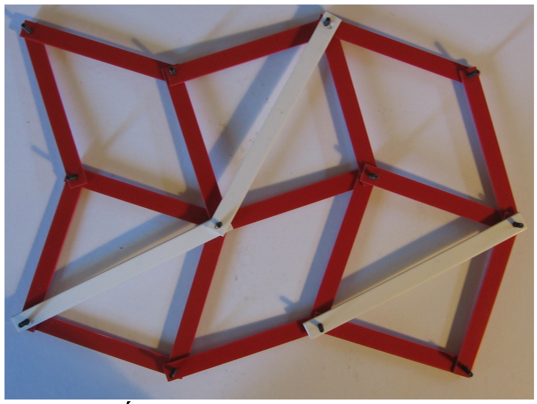
2) un échafaudage donné est-il rigide ?

Pour nous aider dans nos recherches, notre établissement nous a fabriqué des structures « échafaudages ».

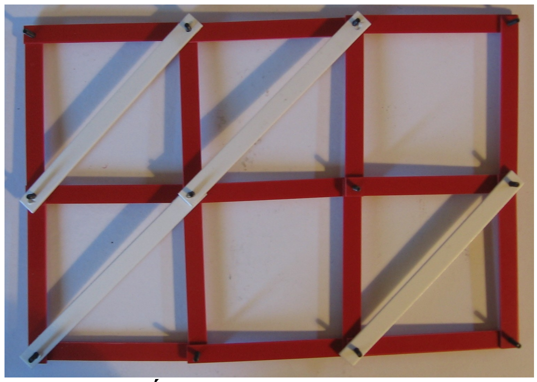


Échafaudage 2×3
Définition : Nous disons qu'un échafaudage est rigide s'il est impossible de le déformer.

Par exemple :



Échafaudage non rigide

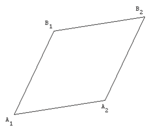


Échafaudage rigide

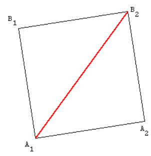
Travail de recherche :

Les échafaudages du type $1 \times n$

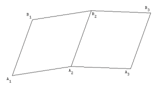
1×1



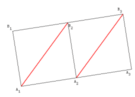
Pour le rigidifier il faut une barre



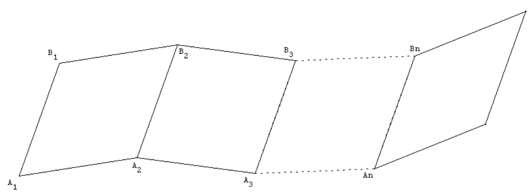
1×2



Pour le rigidifier il faut deux barres

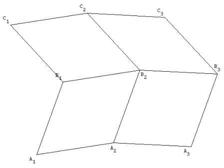


$1 \times n$



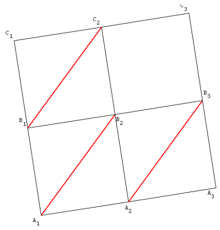
Propriété 1 : pour rigidifier un échafaudage de taille 1×n il nous faudra n barres, car s'il y a une case sans barre diagonale dans cet échafaudage, on pourra le déformer.

Les échafaudages du type 2 × *n*

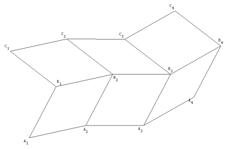


2 × 2

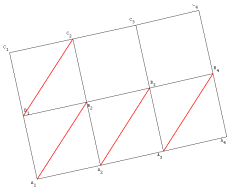
Pour le rigidifier il faudra trois barres. Avec deux barres, l'édifice peut être déformé.



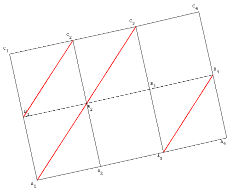
2 × 3



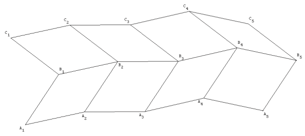
Pour le rigidifier il faut quatre barres.



Nous avons remarqué que nous avons plusieurs manières de disposer ces quatre barres.



2 × 4



Nous avons fait des essais sur nos maquettes, il faut au minimum cinq barres. Là aussi il y a plusieurs solutions.

Pour 2 × 5 il nous faudra 6 barres et pour 2 × *n* nous avons conjecturé qu'il nous faudra *n*+1 barres pour le rigidifier.

Les échafaudages du type 3 × *n*

3 × 3. Il nous faut cinq barres

3 × 4. Il nous en faut six

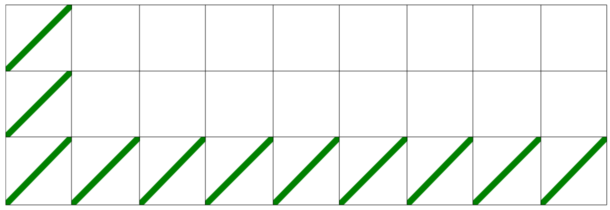
3 × 5. Il en faut sept.

3 × *n*. Nous avons conjecturé qu'il en faudra *n*+2 barres pour le rigidifier.

Conjecture générale : Nous avons généralisé nos conjectures, à savoir pour rigidifier un échafaudage de 4×*n* il faudra *n*+3 barres, 5×*n* il en faudra *n*+4 et pour *m*×*n* il faudra *n*+*m*-1 barres de renfort.

Recherche de conditions « simples » de stabilité

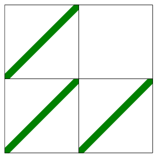
Théorème : les échafaudages avec barres de renfort sur la première colonne et la première ligne sont rigides.



Corollaire : pour un échafaudage *n*×*m*, *n*+*m*-1 barres suffisent pour le rigidifier.

Méthode pour la preuve du théorème :

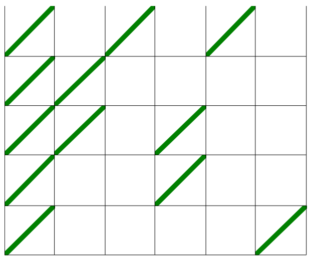
Si à l'intérieur d'une structure donnée, il y a une

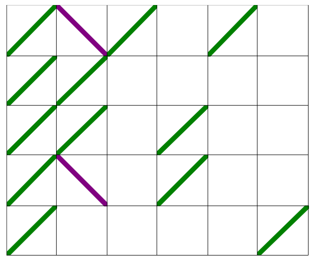


sous-structure 2 × 2 avec trois barres comme ci-contre, alors la quatrième case est rigide. On met alors une barre « virtuelle » dans cette case. On cherche ensuite d'autres sous-structures 2 × 2 avec trois barres (« réelles » ou « virtuelles »). Si on peut de cette manière remplir toutes les cases, alors la structure est rigide.

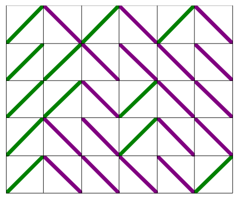
Avec cette règle, nous pouvons déterminer si certains échafaudages sont rigides.

Par exemple :



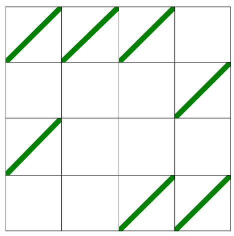


La figure de gauche ci-dessus devient la figure de droite et ainsi de suite nous arrivons à :



Cette méthode permet de donner la preuve de notre théorème. Par contre il existe des échafaudages rigides dont nous ne pouvons pas prouver la rigidité avec notre méthode.

Par exemple :



Cette méthode ne nous a pas permis de prouver la totalité de la conjecture générale. En effet, nous pouvons seulement dire qu'il faudra au minimum une barre par colonne et par ligne (soit max(*m*;*n*) barres). Nous n'avons pas pu prouver qu'il n'existe pas d'échafaudage rigide avec seulement *n*+*m*-2 barres.