Les mouvements de foule

Par MERLINO Marjorie (T°S2), BICHON Adélaide (T°S2), MOUCHET Thiffany (T°S2), AYME Natacha (T°S2) et BICHON Billy (1°S3) du lycée d'Altitude de Briançon

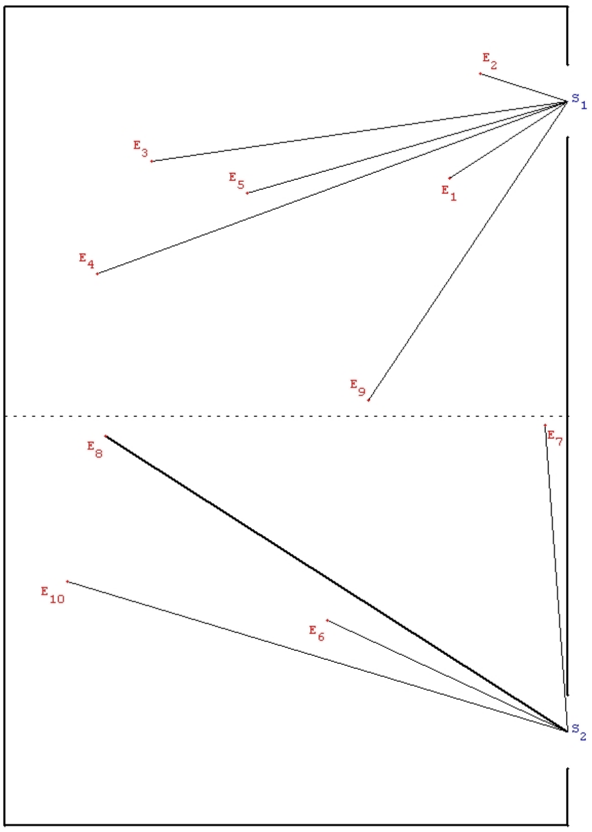
Enseignant : Hubert PROAL
Chercheur : Camille PETIT (Institut Fourier de Grenoble)

Sujet inspiré par la conférence de Juliette VENEL lors du congrès *MATh.en.JEANS* 2010 à Grenoble.
Sujet jumelé avec le lycée Jean-Hinglo de la Réunion.

Sujet : Nous cherchons à modéliser et déterminer le temps moyen d'évacuation de 35 personnes de la salle de cours.

<u>Première idée</u> :

Après avoir mesuré la salle de maths, nous avons décidé de la modéliser par une pièce de 6,87 m sur 10,3 m.
Hypothèses : la salle possédant deux sorties (S_1 et S_2), nous supposerons qu'un élève se dirigera vers la sortie la plus proche. Les élèves vont tous à la même vitesse (1 m/s) et il n'y a pas d'obstacle. Le temps d'évacuation de la salle correspondra donc au plus grand des temps de sortie des élèves (ou distance vu que la vitesse est de 1).



La figure ci-dessus représente une simulation pour dix élèves. Dans cet exemple, le temps d'évacuation de la salle est la distance E_8S_2=6,75. Nous ne préciserons plus les unités, il s'agit de secondes ou de manière équivalente de mètres.
Avec le logiciel Géoplan, nous avons effectué de nombreuses simulations d'évacuation de 10 élèves et nous avons obtenu comme temps moyen de sortie 6,8.

Nous allons essayer de modéliser différemment le problème pour disposer d'outils mathématiques pour le traiter.

<u>Deuxième idée</u> :

Nous avons quadrillé la pièce en cases de 50 cm, soit 13 cases sur 20 cases représentant les positions possibles d'un élève (un élève est considéré comme un carré de 50 cm sur 50 cm)
Nous affectons à chaque case le temps qui la sépare de la sortie la plus proche. Les valeurs trouvées sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.
Par exemple, la valeur 6,33 de la première case signifie que cette dernière est à 6,33 de la sortie

6,33	5,84	5,34	4,85	4,37	3,88	3,4	2,93	2,46	2,02	1,6	1,25	1,03	
6,27	5,77	5,27	4,78	4,28	3,78	3,29	2,8	2,3	1,82	1,35	0,9	0,56	
6,25	5,75	5,25	4,75	4,25	3,75	3,25	2,75	2,25	1,75	1,25	0,75	0,25	S1
6,27	5,77	5,27	4,78	4,28	3,78	3,29	2,8	2,3	1,82	1,35	0,9	0,56	
6,33	5,84	5,34	4,85	4,37	3,88	3,4	2,93	2,46	2,02	1,6	1,25	1,03	
6,43	5,94	5,46	4,98	4,51	4,04	3,58	3,13	2,7	2,3	1,95	1,68	1,52	
6,56	6,09	5,62	5,15	4,7	4,25	3,82	3,4	3,01	2,66	2,36	2,14	2,02	
6,73	6,27	5,81	5,37	4,93	4,51	4,1	3,72	3,36	3,05	2,8	2,61	2,51	
6,93	6,49	6,05	5,62	5,2	4,8	4,42	4,07	3,75	3,47	3,25	3,09	3,01	
7,16	6,73	6,31	5,9	5,51	5,13	4,78	4,45	4,16	3,91	3,72	3,58	3,51	
7,16	6,73	6,31	5,9	5,51	5,13	4,78	4,45	4,16	3,91	3,72	3,58	3,51	
6,93	6,49	6,05	5,62	5,2	4,8	4,42	4,07	3,75	3,47	3,25	3,09	3,01	
6,73	6,27	5,81	5,37	4,93	4,51	4,1	3,72	3,36	3,05	2,8	2,61	2,51	
6,56	6,09	5,62	5,15	4,7	4,25	3,82	3,4	3,01	2,66	2,36	2,14	2,02	
6,43	5,94	5,46	4,98	4,51	4,04	3,58	3,13	2,7	2,3	1,95	1,68	1,52	
6,33	5,84	5,34	4,85	4,37	3,88	3,4	2,93	2,46	2,02	1,6	1,25	1,03	
6,27	5,77	5,27	4,78	4,28	3,78	3,29	2,8	2,3	1,82	1,35	0,9	0,56	
6,25	5,75	5,25	4,75	4,25	3,75	3,25	2,75	2,25	1,75	1,25	0,75	0,25	S2
6,27	5,77	5,27	4,78	4,28	3,78	3,29	2,8	2,3	1,82	1,35	0,9	0,56	
6,33	5,84	5,34	4,85	4,37	3,88	3,4	2,93	2,46	2,02	1,6	1,25	1,03	

la plus proche (S_1).
Nous disposons ainsi de tous les temps possibles d'évacuation d'un élève, si nous faisons la moyenne nous obtenons : 3,85.

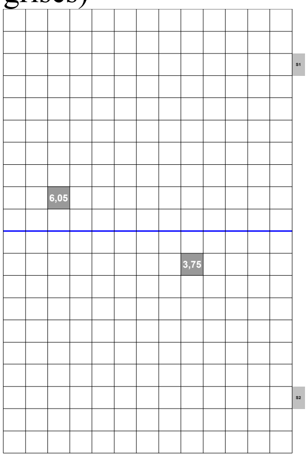
Pour la suite de nos recherches la grille ci-dessus a joué un grand rôle. Nous pouvons regrouper toutes ces valeurs dans un tableau :

Temps	0,25	0,56	0,75	0,9	1,03	1,25	1,35	1,52	1,6	....	6,73	6,93	7,16
Nombre de cases	2	4	2	4	4	6	4	2	4	....	4	2	2

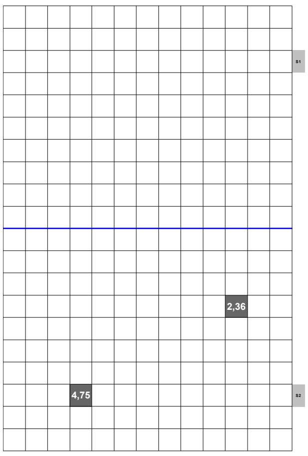
Nous noterons $x=x(T)$ le nombre de cases d'évacuation en un temps T et $y=y(T)$ le nombre de cases d'évacuation en un temps inférieur ou égal à T.
Par exemple pour T=0,9, $x=4$ et $y=2+4+2+4=12$.
Il y a donc 4 cases à distance 0,9 d'une sortie et 12 cases à distance inférieure ou égale à 0,9.

<u>Passage à deux élèves</u> :

Nous gardons le même modèle, mais nous allons placer deux élèves E_1 et E_2 dans la salle. Le temps d'évacuation sera la plus grande distance entre E_1, E_2 et la sortie la plus proche.
Par exemple : (les élèves sont dans les cases grises)



Temps d'évacuation : 6,05



Temps d'évacuation : 4,75

Nous admettons que les positions des deux élèves sont indépendantes, en particulier que les deux élèves peuvent être dans la même case.

Après de nombreux essais, nous avons obtenu le résultat suivant :
Résultat 1 : Le nombre de manières de placer deux élèves pour que le temps d'évacuation soit exactement T est $x(T)^2+2\times x(T)\times(y(T)-x(T))$.

Temps	0,25	0,56	0,75	**0,9**	1,03	1,25	1,35	1,52	1,6	....	T	....	6,73	6,93	7,16
Nombre de cases pour un élèves	2	4	2	**4**	4	6	4	2	4	....	x	....	4	2	2
Nombre de cases pour deux élèves	4	32	28	**80**	112	228	192	108	240	....		....	2032	1028	1036

Par exemple, il y a $4^2+2\times 4\times(12-4)=80$ manières de placer ces deux élèves dans la classe pour avoir une évacuation en un temps de 0,9.

Nous calculons ensuite la moyenne et nous obtenons 4,83.

Lors de nos recherche pour trois élèves, une remarque importante de notre chercheur nous a permis de démontrer le résultat ci-dessus.

Remarque : Si les élèves E_1 et E_2 mettent un temps T pour évacuer la salle alors soit E_1, soit E_2 a mis un temps T et l'autre (cette remarque se généralise à n élèves) a mis un temps inférieur ou égal à T.

Nous cherchons le nombre de manières d'évacuer deux élèves en un temps T.
Si le temps d'évacuation est T, alors :

- soit E_1 est évacué en un temps T et E_2 en un temps inférieur ou égale à T (nous notons X_1 le nombre de cas de figure correspondants)
- soit E_2 est évacué en un temps T et E_1 en un temps inférieur ou égal à T (noté X_2)

$\mathrm{card}(X_1\cup X_2)=\mathrm{card}(X_1)+\mathrm{card}(X_2)-\mathrm{card}(X_1\cap X_2)$, où card(X) signifie nombre d'éléments de X.

Les évènements « E_1 évacué en un temps T» et «E_2 évacué en un temps inférieur ou égal à T» sont par hypothèse indépendants. Cela signifie que l'on a l'égalité :
$P(X_1)=P(E_1=T\cap E_2\leqslant T)=P(E_1=T)\times P(E_2\leqslant T)$.
On en déduit alors la formule :
$\frac{card(X_1)}{260^2}=\frac{x}{260}\times\frac{y}{260}$ autrement dit
$card(X_1)=x\times y$.

En appliquant le même type de raisonnement à X_2 et $X_1\cap X_2$ on obtient le nombre $f_2(T)$ de manières d'évacuer deux élèves en un temps T :
$f_2(T)=x\times y+x\times y-x\times x=2xy-x^2$.

Nous avions trouvé
$x^2+2x(y-x)=x^2+2xy-2x^2=2xy-x^2 = f_2(\mathrm{T})$ ouf, c'est la même chose.

Pour trois élèves :

Toujours la remarque de notre chercheur : pour évacuer trois élèves E_1, E_2 et E_3 en un temps T, alors

- soit E_1 en un temps T et E_2 et E_3 en un temps inférieur ou égal à T,
- soit E_2 évacué en un temps T et E_1 et E_3 en un temps inférieur ou égal à T,
- soit E_3 évacué en un temps T et E_1 et E_2 en un temps inférieur ou égal à T.

Si nous notons X_1 le premier cas, X_2 le second et X_3 le dernier, nous devons déterminer $\mathrm{card}(X_1 \cup X_2 \cup X_3)$.

Avec l'aide de la théorie des « patatoïdes », nous arrivons à montrer que $\mathrm{card}(X_1 \cup X_2 \cup X_3)=\mathrm{card}(X_1)+\mathrm{card}(X_2)+\mathrm{card}(X_3)-\mathrm{card}(X_1 \cap X_2)-\mathrm{card}(X_1 \cap X_3)-\mathrm{card}(X_2 \cap X_3)+\mathrm{card}(X_1 \cap X_2 \cap X_3)$
et nous pouvons calculer chaque terme comme ci-dessus, en utilisant le fait que les évènements sont indépendants. Par exemple : $\mathrm{card}(X_1 \cap X_2)=\mathrm{card}(E_1=\mathrm{T} \text{ et } E_2=\mathrm{T} \text{ et } E_3 \leqslant \mathrm{T})=x^2y$ (démonstration dans le cadre à la fin de l'article)

Résultat 2 : $f_3(\mathrm{T})=3xy^2-3x^2y+x^3$.

Si on applique cette formule, nous trouvons un temps moyen d'évacuation de 3 élèves de 5,3.

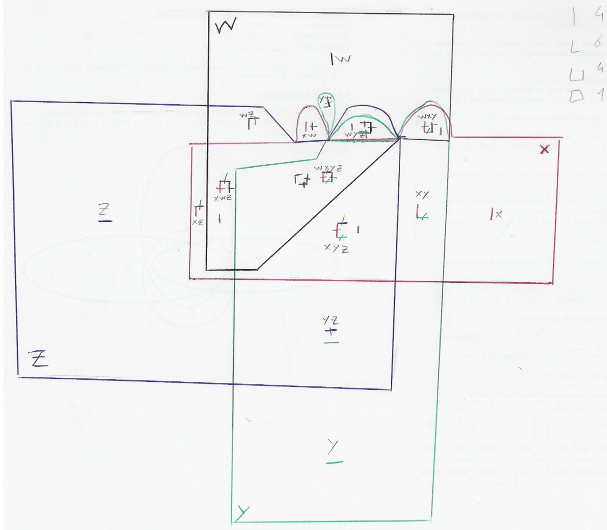
Temps	0,25	0,56	0,75	0,9	1,03	1,25	1,35	1,52	1,6	....	T	....	6,73	6,93	7,16
Nombre de cases pour un élèves	2	4	2	4	4	6	4	2	4	....	$x(T)$	....	4	2	2
Nombre de cases pour deux élèves	4	32	28	80	112	228	192	108	240	....	$f2(T)$	....	2032	1028	1036
Nombre de cases pour trois élèves	8	208	296	1216	2368	6552	6928	4376	10816	....	$f3(T)$	....	774208	396296	402488

La suite de nos recherches consiste à trouver une formule générale. Pour cela nous avons encore étudié le cas de l'évacuation de quatre élèves.

Formule pour quatre élèves :

Évacuation de quatre élèves E_1, E_2, E_3 et E_4 en un temps T. Comme précédemment, on note $X_1=\{E_1=\mathrm{T} \text{ et } E_2, E_3 \text{ et } E_4 \leqslant \mathrm{T}\}$, $X_2=\{E_2=\mathrm{T} \text{ et } E_1, E_3 \text{ et } E_4 \leqslant \mathrm{T}\}$, $X_3=\{E_3=\mathrm{T} \text{ et } E_1, E_2 \text{ et } E_4 \leqslant \mathrm{T}\}$ et $X_4=\{E_4=\mathrm{T} \text{ et } E_1, E_2 \text{ et } E_3 \leqslant \mathrm{T}\}$.
Il nous reste à calculer $\mathrm{card}(X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4)$, ce fut très fastidieux mais nous avons obtenu le résultat suivant :

Résultat 3 : $f_4(\mathrm{T})=4xy^3-6x^2y^2+4x^3y-x^4$.



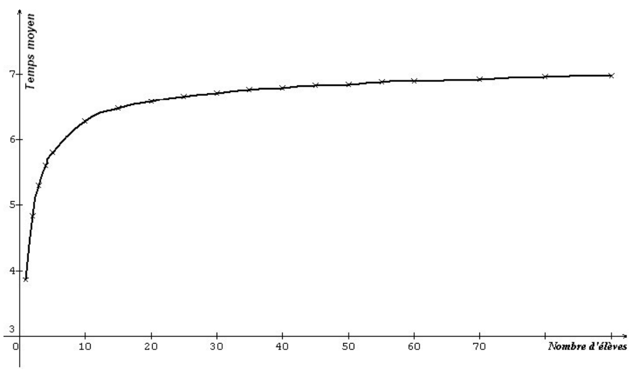
Généralisation :

Nous avons obtenu les formules suivantes, pour un *T* donné :
-pour un élève : $f_1(\mathrm{T})=x$;
-pour deux élèves : $f_2(\mathrm{T})=2xy-x^2$;
-pour trois élèves : $f_3(\mathrm{T})=3xy^2-3x^2y+x^3$;
-pour quatre élèves : $f_4(\mathrm{T})=4xy^3-6x^2y^2+4x^3y-x^4$.

Avec l'aide de notre enseignant, nous avons proposé la formule suivante pour le nombre de configurations de *n* élèves en un temps T :

Conjecture : $f_n(\mathrm{T})=y^n-(y-x)^n$ (voir le cadre remarque du chercheur).

Avec cette formule, nous programmons une feuille de calcul pour obtenir les temps moyens de sortie (en fonction de *n*).
Pour 35 élèves, le temps moyen est de 6,76 et pour 10 de 6,1.



Nous remarquons que le temps moyen d'évacuation tend vers 7,16, ce qui est normal car plus il y a de personnes dans la salle, plus il est probable que l'une d'elle se trouve dans la case maximale 7,16.

Suite aux présentations lors du congrès de Gap et lors du concours Faites de la science, il nous a souvent été posé les questions suivantes :
- Si les élèves ne vont pas à la même vitesse ? Notre modèle n'en tient pas compte et le problème semble délicat.
- Comment prendre en compte l'effet bouchon à la sortie ? Là aussi nous n'avons pas eu le temps de nous pencher sur cette modélisation.
- Que se passe-t-il quand on réduit les tailles des cases ? A priori la grille de départ (pour un élève) change, avec plus de valeurs, mais les autres formules devraient rester identiques.
- Que se passe-t-il quand on rajoute des obstacles ? Nous n'avons pas eu trop le temps de nous pencher sur ce type de problème, mais nous sommes quand même en mesure de donner quelques résultats.

La nouvelle grille pour l'évacuation d'un élève va être comme le dessin ci-après (les parties en noir correspondent aux tables que les élèves ne peuvent pas franchir).

6,43	5,93	5,43	4,93	4,43	3,93	3,43	2,93	2,46	2,02	1,6	1,25	1,03	
		5,32	4,82	4,32	3,82	3,32	2,82	2,32	1,82	1,35	0,9	0,56	
		5,53	5,03							1,25	0,75	0,25	S1
6,32	5,82	5,32	4,82	4,32	3,82	3,32	2,82	2,32	1,82	1,35	0,9	0,56	
		5,53	5,03							1,6	1,25	1,03	
6,73	6,23	5,73	5,3	4,8	4,3	3,8	3,3	2,8	2,3	1,95	1,68	1,52	
		6,01	5,51							2,36	2,14	2,02	
7,22	6,72	6,22	6,01	5,8	5,3	4,8	4,3	3,8	3,3	2,8	2,61	2,51	
		6,72	6,5							3,25	3,09	3,01	
8,21	7,71	7,21	7	6,72	6,22	5,72	5,22	4,72	4,22	3,72	3,58	3,51	
		7,07	6,96							3,72	3,58	3,51	
7,86	7,36	6,86	6,36	6,25	5,75	5,25	4,75	4,25	3,75	3,25	3,09	3,01	
		6,36	5,86							2,8	2,61	2,51	
7,16	6,66	6,16	5,66	5,16	4,66	4,16	3,66	3,16	2,66	2,36	2,14	2,02	
		5,72	5,22							1,95	1,68	1,52	
6,52	6,02	5,52	5,02	4,52	4,02	3,52	3,02	2,52	2,02	1,6	1,25	1,03	
		5,46	4,96							1,35	0,9	0,56	
6,25	5,75	5,25	4,75	4,25	3,75	3,25	2,75	2,25	1,75	1,25	0,75	0,25	S2
6,27	5,77	5,27	4,78	4,28	3,78	3,29	2,8	2,3	1,82	1,35	0,9	0,56	
6,33	5,84	5,34	4,85	4,37	3,88	3,4	2,93	2,46	2,02	1,6	1,25	1,03	

A partir de ceci nous obtenons une nouvelle fonction $f_1(T)=x(T)$ mais la suite de la modélisation et des résultats reste la même.

Remarque du chercheur :
Notons Z_n le temps d'évacuation de n élèves. On a alors la formule suivante : $P(Z_n \leq T)=P(E_1 \leq T, E_2 \leq T, \ldots, E_n \leq T)$.
Par indépendance et comme le temps de sortie de chaque élève suit la même loi de probabilité :

$$P(Z_n \leq T)=P(E_1 \leq T)\ldots P(E_n \leq T)= P(E_1 \leq T)^n.$$

Pour un temps T donné, notons T^- le plus grand temps d'évacuation possible strictement inférieur à T. Par exemple, si $T=0{,}9$, $T^-=0{,}75$. On obtient alors :

$$P(Z_n=T)=P(Z_n \leq T)-P(Z_n \leq T^-)=$$
$$P(E_1 \leq T)^n-P(E_1 \leq T^-)^n=\left(\frac{y}{260}\right)^n-\left(\frac{y-x}{260}\right)^n$$

On retrouve bien la formule pour $f_n(T)$ conjecturée par les élèves.

Démonstration de
card(X₁∩X₂)=card(E₁=T et E₂=T et E₃⩽T)=x²*y*

Les positions des élèves sont indépendantes, ainsi P(E_1=T et E_2=T et E_3⩽T) = P(E_1=T)×P(E_2=T)×P(E_3⩽T)
ce qui donne

$$\frac{card(E_1=T \text{ et } E_2=T \text{ et } E_3 \leq T)}{260^3}=$$

$$\frac{card(E_1=T)}{260}\times\frac{card(E_2=T)}{260}\times\frac{card(E_3 \leq T)}{260}=$$

$$\frac{x}{260}\times\frac{x}{260}\times\frac{y}{260}$$

autrement dit card(E_1=T et E_2=T et E_3⩽T)=x²*y*.

Présentation lors du concours Faites de la Science à Marseille