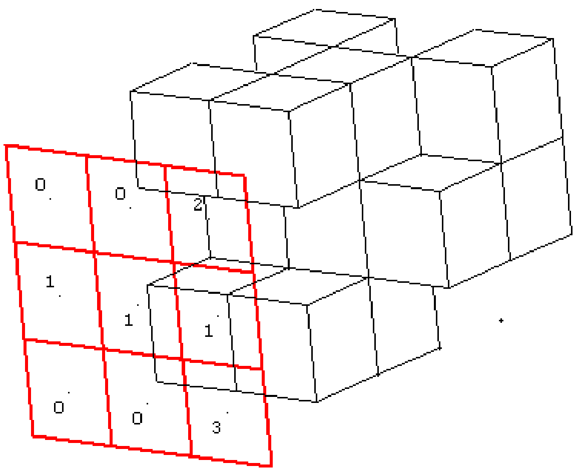
Les rayons X

Par DE NARDO Julien, RIPPERT Jean-Baptiste, PARIS Bastien, GARDONI Florent élèves de T°S-si du Lycée d'Altitude de Briançon

Enseignant : Hubert PROAL
Chercheur : Camille PETIT (Institut Fourier de Grenoble)

Sujet :
Un solide, constitué de plusieurs cubes, est placé dans une boîte de taille 3×3×3. On réalise une ou plusieurs photos de différents côtés. Une photo est constituée d'une grille de 3×3 où chaque valeur de la grille détermine la distance à l'objet.

Exemple :

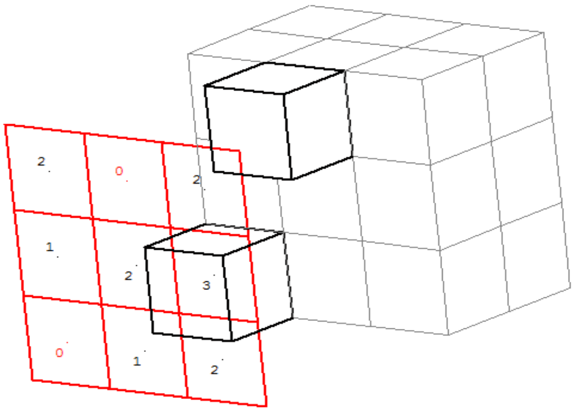


Problème : est-il possible de reconstituer un solide à partir d'une ou plusieurs photos ?

Voici ci-contre une photo d'un solide. Que peut-on dire sur ce solide ?

2	0	2
1	2	3
0	1	2

Travail avec une photo :
Nos premières recherches nous ont permis de déterminer le premier niveau du solide (le niveau collé à la photo).
En effet si nous avons un 0 sur une cellule, le solide est collé à la cellule et si nous avons un 1 ou plus, il y a un vide entre le solide et la photo.

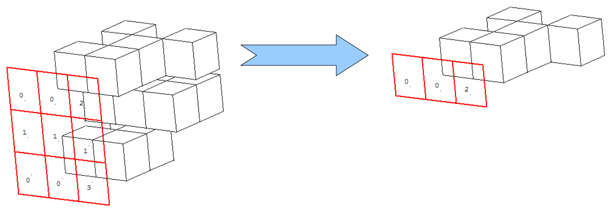


Un zéro nous assure que nous avons un cube au niveau 1 du solide

a zero nous assure que nous n'avons pas de cube au niveau 1 du solide

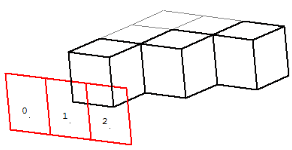
Par contre, on ne peut pas déterminer de manière générale les deuxième et troisième niveaux. En effet, dans la photo précédente, chaque 0 permet de dire que le solide touche la photo à cet endroit, mais nous ne savons pas si les deux cases derrière sont pleines ou vides. Autrement dit le premier cube cache les deux cases suivantes.

Pour faciliter la compréhension du problème, on découpe le solide en tranches.

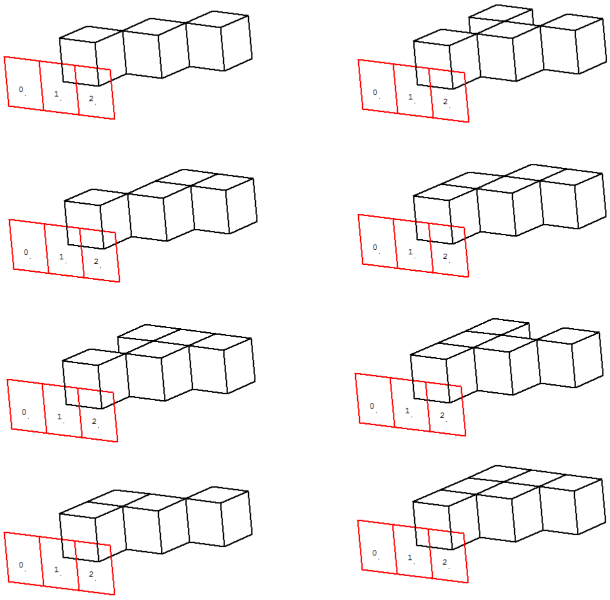


Si sur une photo il y a un 2 ou un 3, nous pouvons connaître la totalité de la rangée correspondante.
S'il y a un 1, il y a deux cas de figure possibles : dans un cas, la case de derrière est pleine et dans l'autre, elle est vide.
S'il y a un 0, nous avons le même problème sur les deux cases cachées par la case correspondant au 0, ce qui crée quatre cas de figure possibles.

Dans l'exemple ci-contre, nous avons trois cases qui posent problème. Nous ne pouvons pas déterminer si elles sont vides ou pleines.



Ainsi sur une vue, on peut déterminer le nombre d'emplacements qu'on ne peut pas connaître.
Une fois que l'on a calculé le nombre d'emplacements mystères (emplacements que l'on ne peut pas connaître), on peut en déduire le nombre de solides qui correspondent à la photo.
Par exemple, la photo [0-1-2] nous donne 2+1+0=3 emplacements mystérieux, soit $2^3=8$ solides possibles :



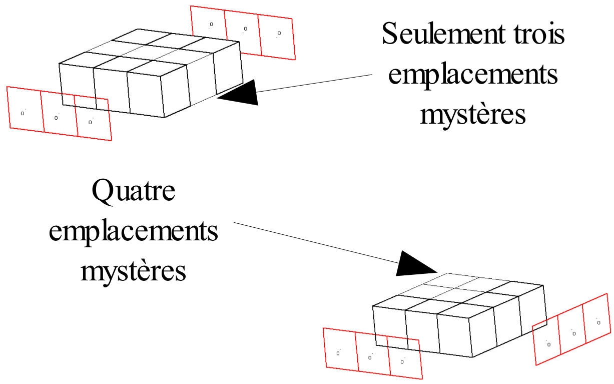
De manière générale, nous pouvons déterminer le nombre de cases mystères et le nombre de combinaisons possibles à partir d'une photo. Pour trouver le nombre de cases mystères, on regarde la photo. Sachant qu'un 0 cache 2 cases, on définit $f(0)=2$. De même, un 1 cache une case donc $f(1)=1$. Pour un 2 et un 3, aucune case n'est cachée $f(2)=f(3)=0$. On peut alors additionner chaque valeur image des cases de la photo et ainsi obtenir le nombre total de cases mystères.

2	0	2
1	2	3
0	1	2

On appelle n ce nombre de cases mystères.
On peut connaître le nombre de solides possibles grâce à n. En effet, une case mystère est soit vide soit pleine, donc nous avons 2^n solides possibles.
Par exemple, la photo ci-dessus nous permet de dire que nous avons $f(2)+f(0)+f(2)+...+f(2)=6$ cases mystères, donc $2^6=64$ solides correspondent à cette photo.

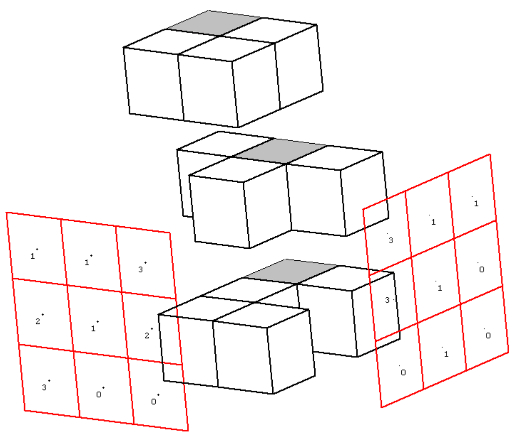
<u>Travail avec deux photos</u> :
Les propriétés qui marchent avec une photo marchent aussi avec deux photos. De manière générale, nous pouvons déterminer plus de cellules avec deux photos qu'avec une.

Remarque : deux photos opposées permettent de connaître au minimum 6 cases alors que deux photos adjacentes nous donnent au minimum 5 cases. En revanche, il existe des solides pour lesquels deux photos adjacentes donnent plus d'informations que deux photos opposées.



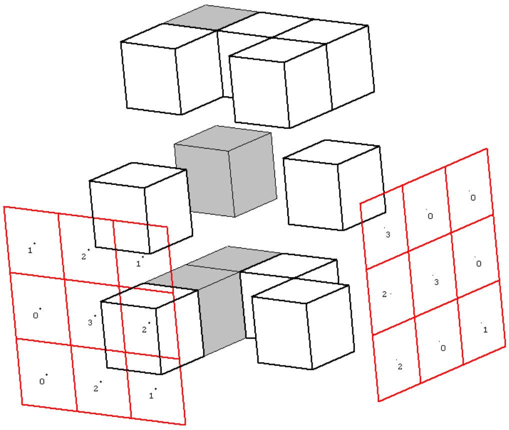
Quand nous avons une photo, nous pouvons déterminer le nombre de cases mystères (étude précédente) et nous avons cherché une méthode « simple » pour le cas de deux photos.

Nous avons procédé de la même manière, en appliquant la fonction f sur chacune des photos et nous pensions que pour obtenir le nombre de cases mystères, il suffirait de soustraire les deux résultats obtenus.
Par exemple :



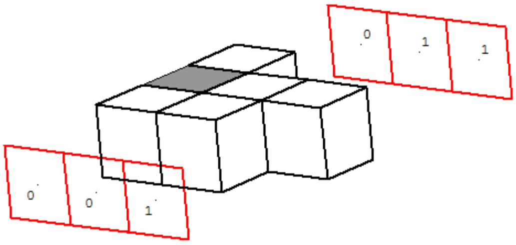
Pour la photo de face, $f(1)+f(1)+...+f(0)=7$ et pour la photo de côté $f(3)+f(1)+f(1)+...+f(0)=10$
De plus 10-7=3 et dans ce cas nous avons bien 3 cases mystères (les cases en gris).

Malheureusement nous avons trouvé un contre-exemple à cette conjecture.

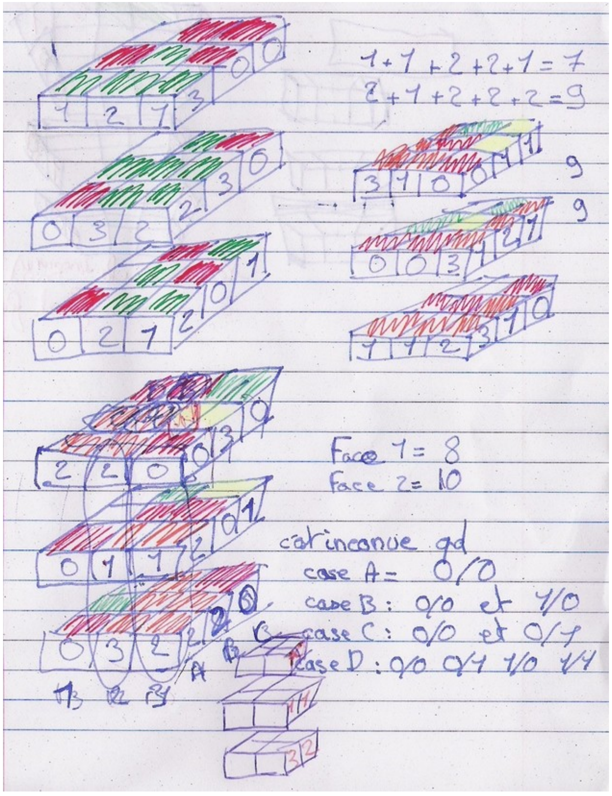


Pour la photo de face, $f(1)+f(2)+f(1)+...+f(1)=7$ et pour la photo de côté $f(3)+f(0)+...+f(1)=9$
Or 9-7=2 mais nous avons 4 cases mystères (en gris).

Actuellement nous n'avons pas trouvé de méthodes simples pour deux photos adjacentes. Par contre pour deux photos opposées nous savons qu'il y a autant de cases mystères que de cellules où nous avons deux zéros qui se font face.



Présentation lors du congrès *MATh.en.JEANS* de Vienne (Autriche)



Extrait du cahier de recherche des élèves

Présentation du stand lors du congrès *MATh.en.JEANS* de Gap