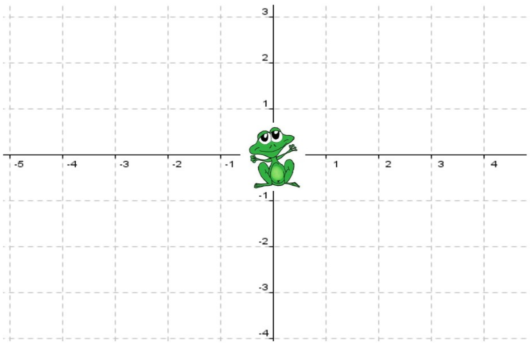
La géométrie de la grenouille

Par ASTIER Eloi, CHAIX Mélanie et ARHIE Adrien, élèves de T°S1 au lycée d'Altitude de Briançon.

Enseignant : Hubert PROAL
Chercheur : Camille PETIT (Institut Fourier de Grenoble)

Sujet :
Soit une grenouille dont l'espace de vie est l'ensemble des points du plan de coordonnées entières.
Elle effectue des sauts uniquement de longueur $\sqrt{5}$.

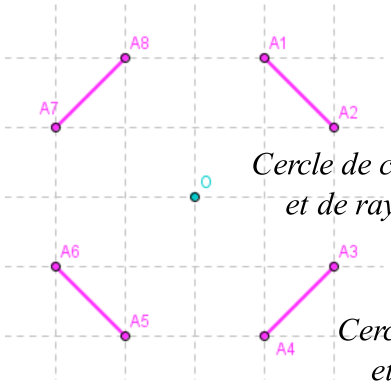


Étant donnés deux points A et B de coordonnées entières de son espace de vie, on définit la distance_grenouille par Dg(A,B) = nombre minimal de sauts pour aller de A à B.

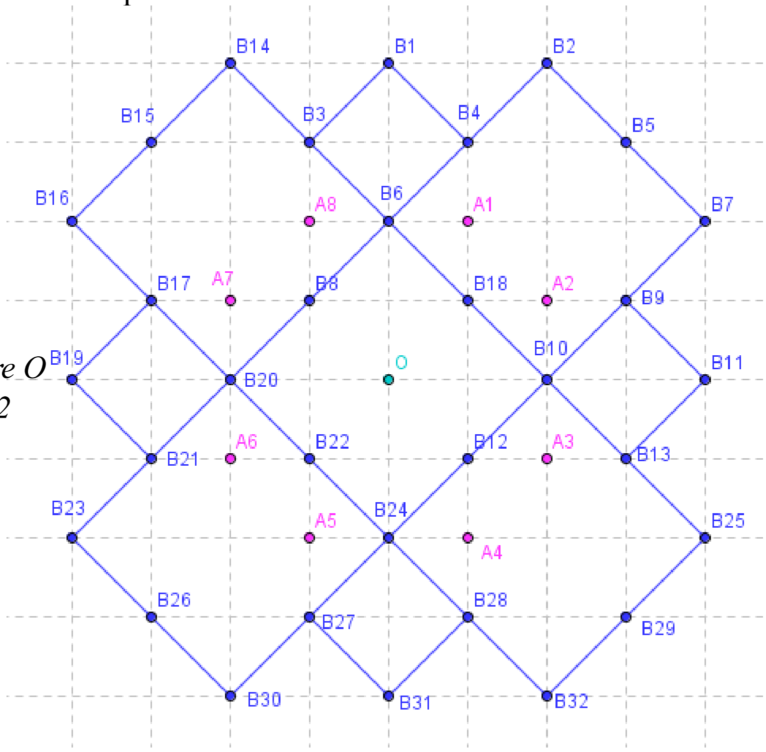
Comment est la géométrie des grenouilles ? Cercles, triangles, médiatrices...

Étude des cercles

Nous avons commencé nos recherches en regardant comment sont les cercles de différents rayons. Rapidement (rayon 3), nous sommes arrivés à des problèmes de constructions.



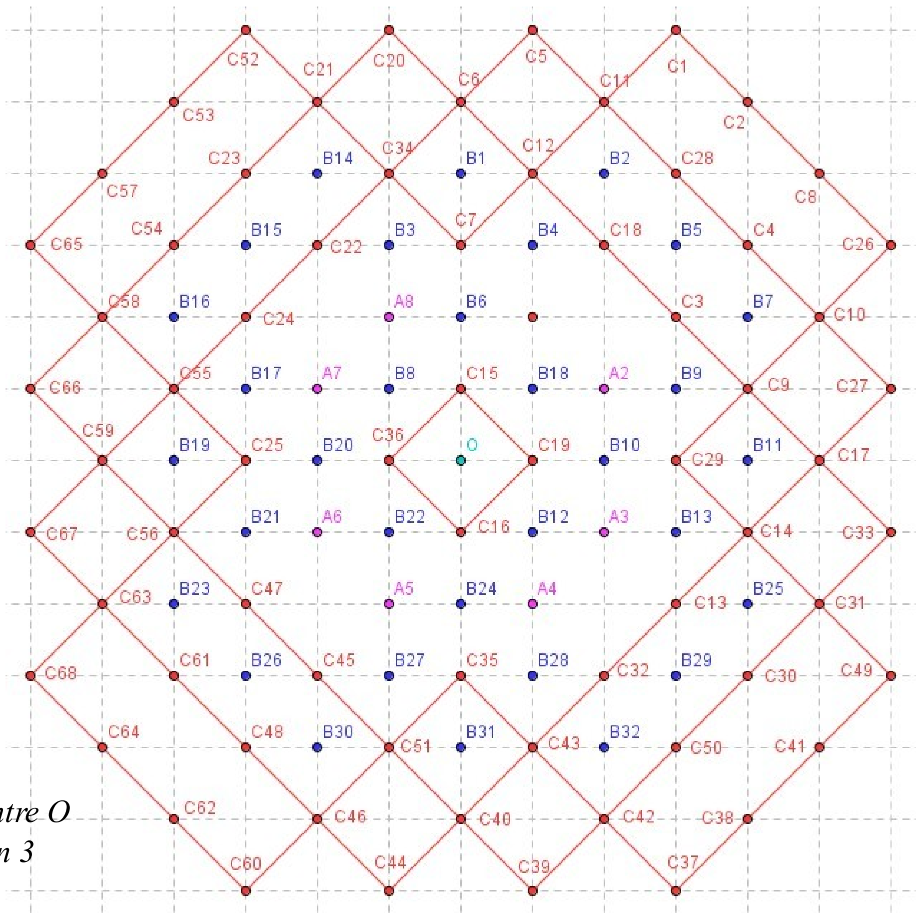
Cercle de centre O et de rayon 1



Cercle de centre O et de rayon 2

En effet, si on regarde le tableau suivant on comprend mieux que la construction des cercles est compliquée.

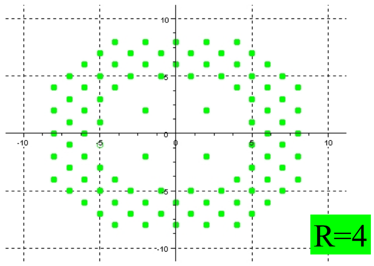
Rayon du cercle	Nombre de points
1	8
2	32
3	68
4	96
5	120
6	148
7	176
8	204
9	232
10	260
11	288
12	316
13	344

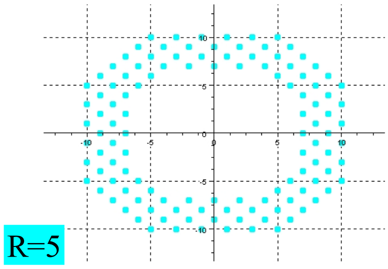


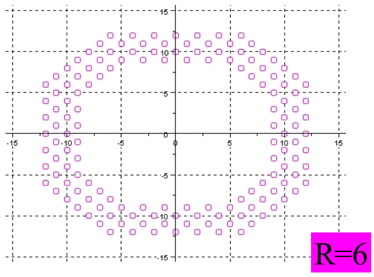
Cercle de centre O et de rayon 3

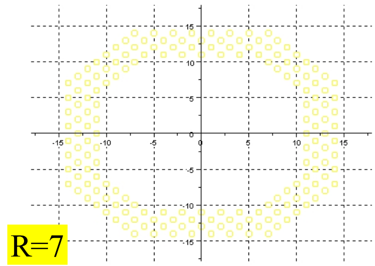
Avec l'aide du logiciel Scilab, nous avons pu construire différents cercles et savoir pour chacun leur nombre de points.
Nous avons remarqué une certaine logique dans la progression du nombre de points d'un cercle en fonction du rayon et nous avons même établie une formule :

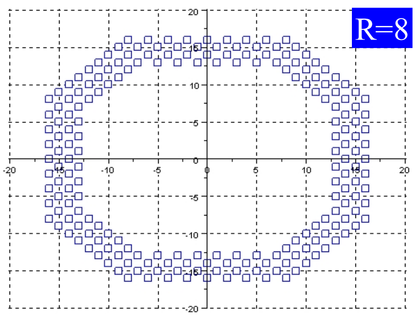
Rayon du cercle	Nombre de points	Écart 1
1	8	
2	32	24
3	68	36
4	96	28
5	120	24
6	148	28
7	176	28
8	204	28
9	232	28
10	260	28
11	288	28
12	316	28
13	344	28

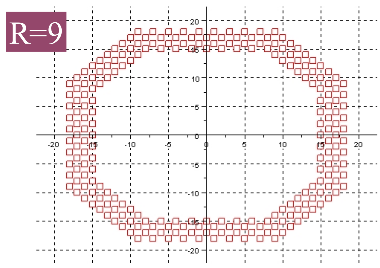




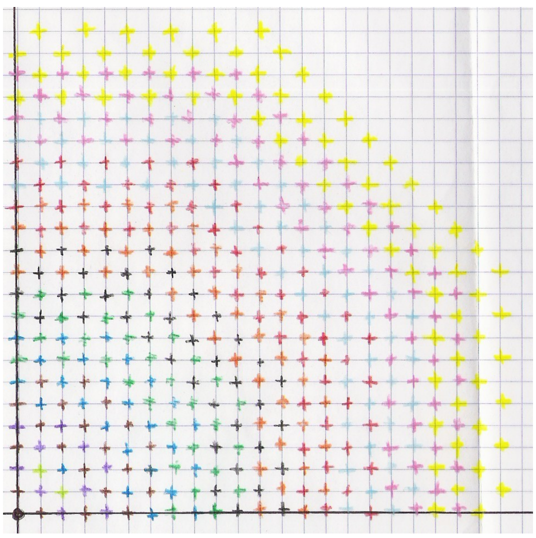








Si on note u_n le nombre de point du cercle de rayon n. Nous avons :
$u_5=120$ et $u_{n+1}=u_n+28$ autrement dit u_n est arithmétique à partir de $n=5$, ce qui donne $u_n=120+28(n-5)$ pour $n \geqslant 5$.
Remarque : lors de nos recherches, nous avions mal programmé scilab et nous avions une suite bien plus compliquée que nous étions quand même arrivés à formuler.

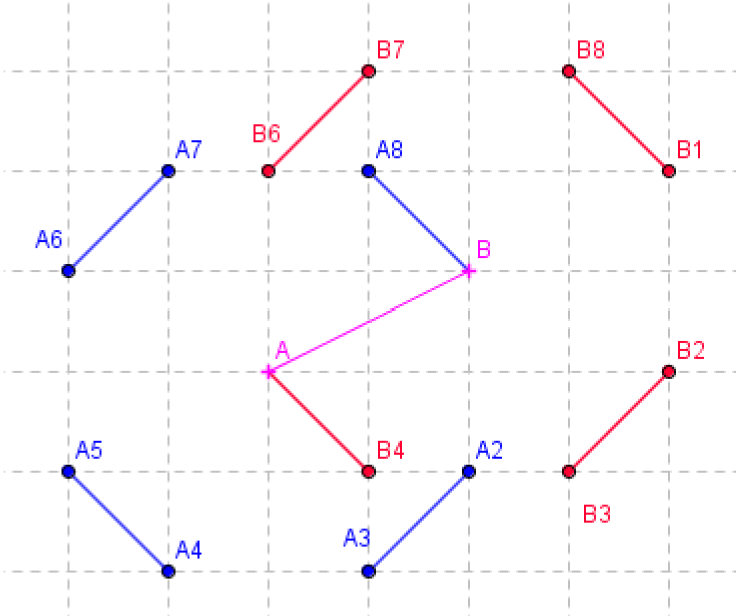


Les triangles équilatéraux

Lors de nos travaux, une remarque nous est apparue : « *On ne peut pas faire un chemin fermé avec un nombre impair de déplacement* » Adrien

Par exemple, vous ne pouvez pas faire de chemin fermé de longueur 3 (avec la distance de la grenouille).

Démonstration géométrique :
Soient A et B deux points à une distance 1. On remarque que les cercles de centres A et B et de rayon 1 ne se coupent pas en un autre point que A et B.



Le dessin ci dessus est un cas particulier pour la position de B, mais ça marche pour les 8 positions possible de B sur le cercle de centre A et de rayon 1.

Démonstration algébrique :
On prend A comme origine du repère. Le cercle de centre A est de rayon 1 sera noté
$\Gamma=\{1+2i, 2+i, 2-i, 1-2i, -1-2i, -2-i, -2+i, -1+2i\}$
On prend B(b) et C(c) sur Γ et on suppose que la distance BC vaut 1. Autrement dit notre triangle ABC est équilatéral de coté 1, mais on va montrer que nous ne pouvons pas avoir B et C.
Vu que la distance BC vaut 1, nous avons $c=b+a$ où a est une valeur de Γ
On remarque que pour les valeurs de Γ, si la partie réelle est paire, la partie imaginaire est impaire et inversement.
Supposons que pour c, ce soit sa partie réelle qui est paire (2 ou -2) et donc sa partie imaginaire impaire (1 ou -1)
La relation $c=b+a$ va donner en partie réelle : $\pm2=\text{Re}(b)+\text{Re}(a)$, pas le choix les deux parties réelles de b et a sont égales à ±1. Autrement dit elle sont impaires et donc d'après la remarque les parties imaginaires de a et b seront paires (±2) et leur somme ne pourra pas faire ±1.
Lors d'une rencontre avec notre chercheur, ce dernier nous a mis sur une piste pour la démonstration dans le cas général.

Nous avons huit déplacements possibles : $\{1+2i, 2+i, 2-i, 1-2i, -1-2i, -2-i, -2+i, -1+2i\}$
Nous pouvons les regrouper en deux types :
$\Gamma_1=\{2+i, 2-i, -2+i, -2-i\}$ de la forme *pair*+*impair*×i

Γ_2={1+2i, 1-2i, -1-2i, -1+2i} de la forme *impair*+*pair*×i
Soit N le nombre de déplacement pour faire notre chemin fermé.

On veut démontrer que N est pair.

On décompose N en a+b où a est le nombre de déplacements du type Γ_1 et b le nombre de déplacement du type Γ_2.

Si a pair et b pair alors N=a+b est pair
Si a impair et b impair alors N=a+b est pair

Si a impair et b pair alors N=a+b est impair mais ceci est impossible, en effet :
En abscisse nous obtenons a×*pair*+b×*impair* et cela donne un nombre pair
En ordonnée nous obtenons a×*impair*+b×*pair* et cela donne un nombre impair, or si on veut revenir au point de départ nous ne pouvons pas avoir un déplacement horizontal ou vertical impair.

Si a pair et b impair alors N=a+b est impair mais ceci est impossible, en effet :
En abscisse nous obtenons a×pair+b×impair est cela donne un nombre impair, or si on veut revenir au point de départ nous ne pouvons pas avoir un déplacement horizontal ou vertical impair.

Donc N=a+b ne pourra pas être impair, autrement dit il est pair.

<u>**La géométrie de la grenouille**</u>

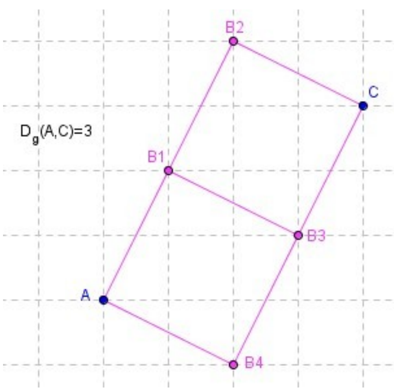
Nous avons remarqué que les cercles pouvaient être tangent EN DEUX POINTS ou ne pas avoir de points communs.
Nous savons aussi, en géométrie euclidienne, que si B∈[AC] équivaut à d(A,C)=d(A,B)+d(B,C).
Autrement dit le segment [AC] est l'ensemble des points B qui vérifie l'égalité dans l'inégalité triangulaire.

Si on passe en géométrie de la grenouille, que deviennent les segments [AC] ?

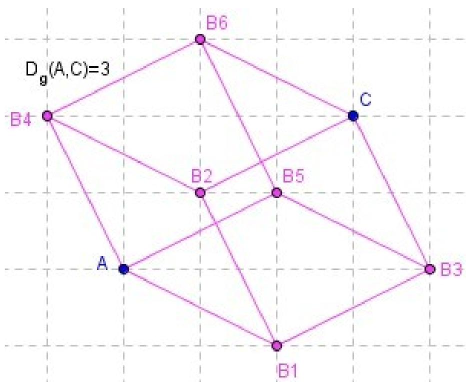
Première étape, mesurer la longueur AC :

Nos dernières recherches ont porté sur avoir un encadrement de la distance AC, mais nous n'avons pas encore rédigé de texte.

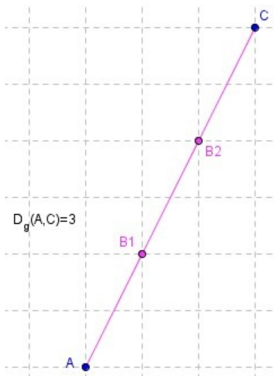
Deuxième étape : trouver tous les points qui vont former le segment [AC]
Regardons quelques cas « simples » où $D_g(A,C)=3$. Nous avons alors, suivant la position de A et C, déterminer l'ensemble des points B tels que $D_g(A,C)=D_g(A,B)+D_g(B,C)$, c'est-à-dire les segments [AC].



Deux mouvements identiques



Aucun mouvement identique



Trois mouvements identiques

ANNEXE : Programmes en scilab :

```
I=[0] // cercle de rayon 0, un point. C'est le premier cercle
J=[1+2*%i 2+%i 1-2*%i 2-%i -1+2*%i -1-2*%i -2+%i -2-%i] // cercle de rayon 2. C(2)
C=list(I,J) // C va être la liste des cercles, C(n) sera le n-ième cercle de rayon n-1

function n=nbpt(I,k) // compte le nombre de points du cercle k de la liste I
  n=length (I(k))
endfunction

function r=cherchept(I,k,K) // cherche K dans la liste I jusqu'au cercle k
  r=0; // si r=0 alors pas K sinon nb de fois où K
  for i=1:k
    for j=1:nbpt(I,i)
      if I(i)(j)==K then
        r=r+1;
      end
    end
  end
endfunction

function r=comparept(I,A) // recherche le point A dans le cercle I
  r=0; // 0 si le terme n'est pas présent
  for i=1:length(I)
    if I(i)==A then
      r=1;
    end
  end
endfunction

function K=enleve(I) // enlève les doublons du cercle I
    n=1;K(1)=I(1)
    for i=2:length(I)
        if comparept(K,I(i))==0 then
          n=n+1;
          K(n)=I(i);
        end
    end
endfunction

function K=cerclen(I,k)// fait le cercle k mais il faut avoir le cercle k-1
  n=1;
  for i=1:nbpt(I,k-1)
    for j=1:8
      L(n)=I(k-1)(i)+I(2)(j);
      if cherchept(I,k-1,L(n))==0 then
        n=n+1;
      end
    end
  end
```

```
  K=enleve(L)
endfunction
function J=touscercle(I,k) // liste de tous les cercles jusqu'à k
  J=list([I(1)],[I(2)]);
  for i=3:k
    J(i)=cerclen(J,i)
  end
endfunction

J=["k*" "ko" "bo" "ro" "go" "co" "mo" "yo" "bs" "rs" "gs" "cs" "ms" "ys"] // code des couleurs

function descercle(I,k) // dessine le cercle k en couleur J(k)
  zoom_rect ([-k*sqrt(5),-k*sqrt(5),k*sqrt(5),k*sqrt(5)])
  xgrid // fait un quadrillage
  a=gca(); a.x_location = "middle"; a.y_location = "middle" // centre les axes
  for i=1:nbpt(I,k)
    plot (real(I(k)(i)),imag(I(k)(i)),J(k))
  end
endfunction
```