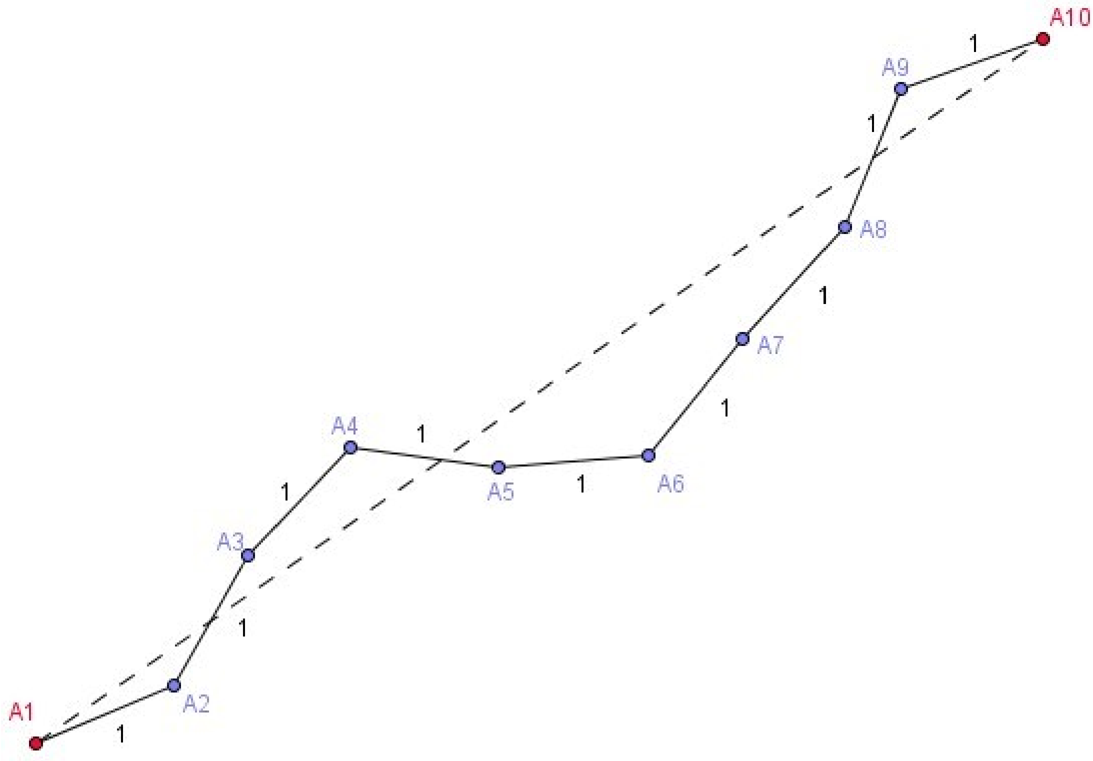
La route des fourmis

Par CUVILLIER Aurore, DISDIER Maëlle et GUITARD Gaultier, élèves de 1°S au lycée d'Altitude de Briançon.

Enseignant : Hubert PROAL
Chercheur : Camille PETIT (Institut Fourier de Grenoble)

<u>Sujet</u> :

Une première fourmi (l'éclaireuse) part de la fourmilière (A_1) et fait 10 déplacements au hasard de longueur 1. A chaque déplacement elle laisse une marque. Au dixième déplacement elle trouve de la nourriture (A_{10}).

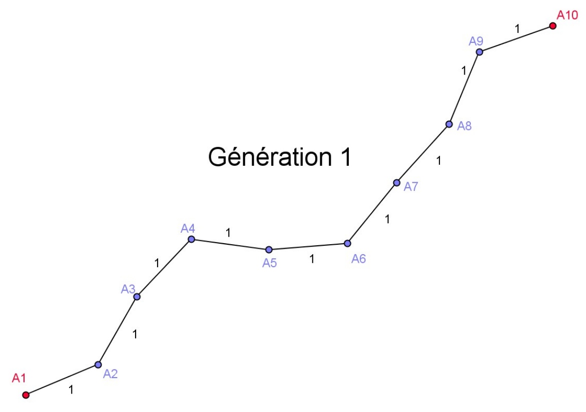


Le but du sujet est d'arriver à proposer un modèle de comportement des fourmis, qui « voient » seulement à une distance inférieure ou égale à 1, pour trouver le plus court chemin de A_1 à A_{10} (deux points fixés)

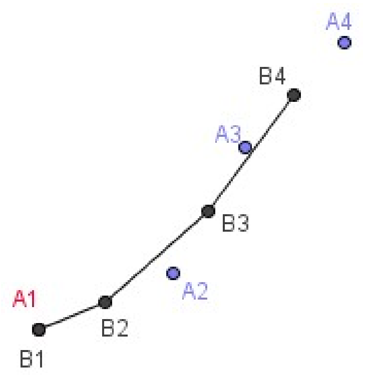
Le modèle :

Le modèle que nous avons proposé au bout de quelques séances de MeJ est le suivant :
La première fourmi fait un premier trajet que l'on appelle première génération.

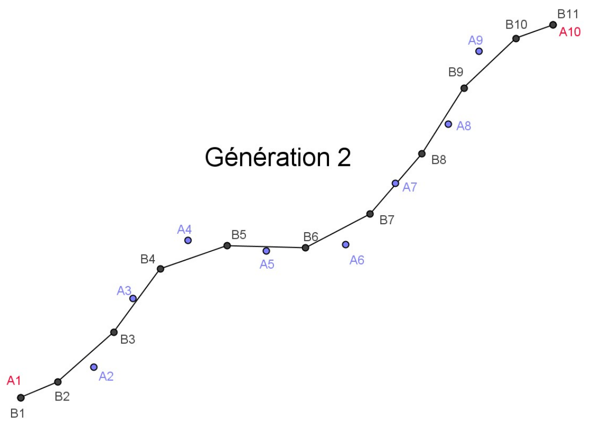
Deux fourmis partent de A_1. L'une s'arrête à la moitié $[A_1A_2]$ l'autre poursuit son chemin et attend que sa collègue la retrouve quand elle est à la moitié de $[A_2A_3]$. Ainsi de suite on obtient le trajet de deuxième génération.
Deux fourmis partent de A1 et font le même procédé sur le trajet de la deuxième génération, on obtient le trajet de troisième génération.



Chemin suivi par la première fourmi de A_1 à A_{10}

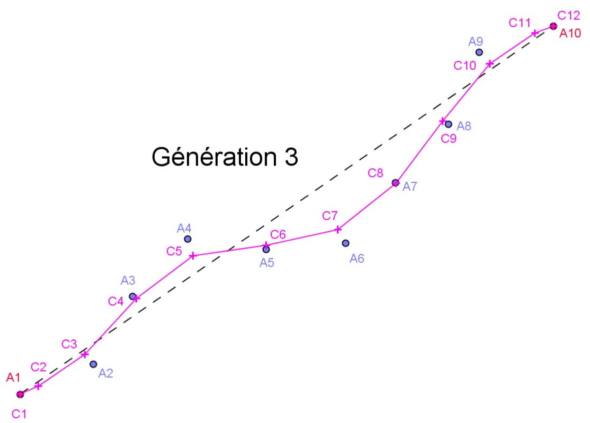


Début du chemin de génération 2



Chemin suivi par les deux fourmis de la génération 2 de A_1 à A_{10}

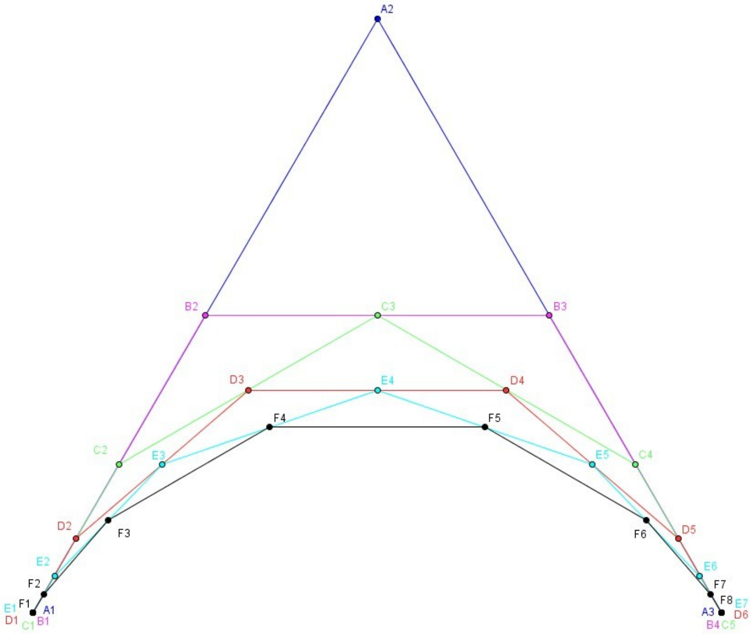
Avec l'aide du logiciel geogebra nous avons regardé comment évolue le chemin des fourmis. Il semblerait que le chemin tende vers le segment $[A_1A_{10}]$



Chemin suivi par les deux fourmis de la génération 3 de A_1 à A_{10}

<u>Étude du modèle dans un cas simple</u> :

Pour essayer de prouver cette conjecture, nous avons commencé par étudier le cas où le chemin initial est composé de deux segments (la fourmi éclaireuse fait seulement deux déplacements).
On a supposé que le triangle ainsi formé était équilatéral.
Une manière de montrer que le chemin tend vers le segment $[A_1A_3]$, c'est de montrer que les hauteurs des figures que nous obtenons tendent vers zéro.



Le logiciel géogébra est adapté pour ce type de calcul mais il nécessite de faire tous les points un par un. On a alors travaillé avec le logiciel Scilab qui nous a permis de programmer la suite des chemins.

Nous allons repéré les points par leur affixe complexe (leurs coordonnées) et un chemin sera ainsi une suite de points. Par exemple le chemin initial correspond à la suite :

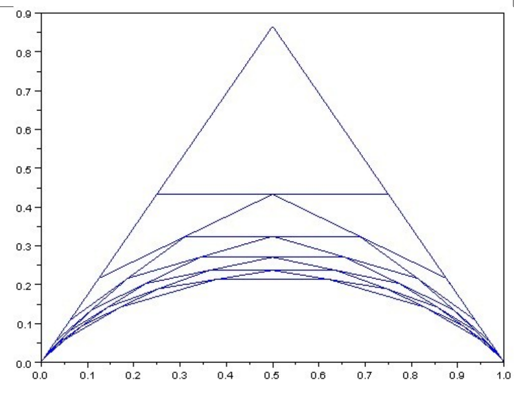
$u(1)=0 \qquad u(2)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \qquad u(3)=1$

Dans la machine on rentre u=[0 0,5+%i*sqrt(3)/2 1]
Ensuite on saisit le programme ci-contre.

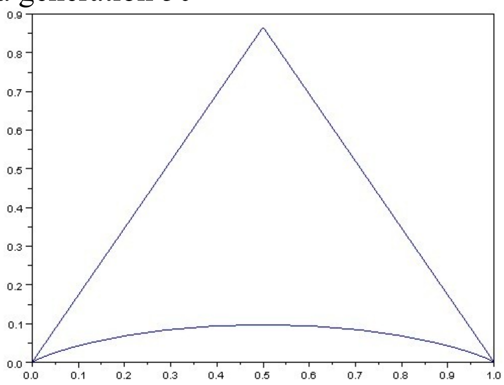
```
function v=chemin(u,g) //nom de la fonction CHEMIN avec deux arguments : la suite initiale et la génération que l'on souhaite avoir après u
  T=length(u) //détermine la longueur de la suite initiale
  for n=1:g //n correspond à la génération que la machine est en train de calculer
    for m=1:T+n //m correspond au numéro du point dans la génération n
      if m==1 then
        v(m)=u(m)
      elseif m==T+n then
        v(m)=u(m-1)
      else
        v(m)=(u(m)+u(m-1))/2
      end
    end
    u=v
  end
endfunction
```

Ce programme permet de calculer les points en fonction de la suite initiale et de la génération que nous avons choisi. Si on le met en exécution, par exemple : chemin(u,6)
On obtient les coordonnées des points F dans le précédent graphique, c'est-à-dire :
F(0)=0 F(1)=0.0078125 + 0.0135316i
F(2)=0.0625 + 0.0811899i
F(3)=0.2265625 + 0.2029747i
F(4)=0.5 + 0.2706329i
F(5)=0.7734375 + 0.2029747i
F(6)=0.9375 + 0.0811899i
F(7)=0.9921875 + 0.0135316i et F(8)=1

Mais on peut aussi les tracer avec le logiciel scilab, voici les graphes des dix premières générations :

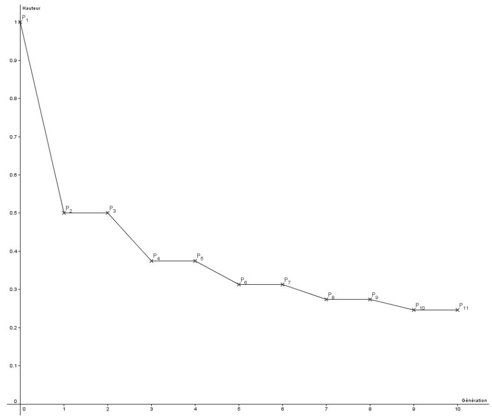


Ou encore voici le graphe de la génération 50



Fort de notre outil informatique, nous lui avons demandé de calculer les « hauteurs » maximales, c'est-à-dire la plus grande distance entre le chemin et le segment [u(1),u(3)] en fonction de la génération. Nous sommes partis de la suite initiale u(1)=0, u(2)=1+i, u(3)=2 pour avoir une hauteur initiale de 1 (triangle isocèle).

Génération	Hauteur
0	1,0000000
1	0,5000000
2	0,5000000
3	0,3750000
4	0,3750000
5	0,3125000
6	0,3125000
7	0,2734375
8	0,2734375
9	0,2460938
10	0,2460938



On remarque que la suite des hauteurs évolue tous les deux termes et pour essayer de trouver une formule pour la progression, il est plus judicieux de l'inverser :

Génération	Hauteur	1/Hauteur
0	1,0000000	1
1	0,5000000	2
2	0,5000000	2
3	0,3750000	2,67
4	0,3750000	2,67
5	0,3125000	3,2
6	0,3125000	3,2
7	0,2734375	3,66
8	0,2734375	3,66
9	0,2460938	4,06
10	0,2460938	4,06

Nous avons pris plus de valeurs et avec l'aide d'un tableur nous avons essayé de trouver une « logique » dans la progression des valeurs. Voici ce que nous sommes arrivés à trouver :

Génération	1/Hauteur	Nombres pairs	Rapports des 1/h	Rapports de la colonne ci-contre	Rapports de la colonne ci-contre	Suite des nombres pairs multiplié par les rapports des 1/h
1	1,0000000	2,0	0,5000000	1,50000	0,7407408	1
2	2,0000000	4,0	0,7500000	1,11111	0,9450000	3
3	2,6666667	6,0	0,8333333	1,05000	0,9795919	5
4	3,2000000	8,0	0,8750000	1,02857	0,9902263	7
5	3,6571429	10,0	0,9000000	1,01852	0,9945690	9
6	4,0634921	12,0	0,9166667	1,01299	0,9966716	11
7	4,4329004	14,0	0,9285714	1,00962	0,9978130	13
8	4,7738928	16,0	0,9375000	1,00741	0,9984862	15
9	5,0921523	18,0	0,9444444	1,00588	0,9989088	17
10	5,3916907	20,0	0,9500000	1,00478	0,9991874	19
11	5,6754639	22,0	0,9545455	1,00397	0,9993787	21
12	5,9457240	24,0	0,9583333	1,00334	0,9995143	23
13	6,2042338	26,0	0,9615385	1,00286	0,9996131	25
14	6,4524031	28,0	0,9642857	1,00247	0,9996868	27
15	6,6913810	30,0	0,9666667	1,00216	0,9997429	29
16	6,9221183	32,0	0,9687500	1,00190	0,9997864	31
17	7,1454124	34,0	0,9705882	1,00168	0,9998205	33
18	7,3619401	36,0	0,9722222	1,00150	0,9998478	35
19	7,5722812	38,0	0,9736842	1,00135	0,9998698	37
20	7,7769375	40,0	0,9750000	1,00122	0,9998878	39
21	7,9763461	42,0	0,9761905	1,00111	0,9999026	41
22	8,1708912	44,0	0,9772727	1,00101	0,9999149	43
23	8,3609119	46,0	0,9782609	1,00093	0,9999252	45
24	8,5467099	48,0	0,9791667	1,00085	0,0000000	47
25	8,7285548	50,0	0,9800000	0,00000		49
26	8,9066886	52,0				

La régularité dans la dernière colonne nous a permis de trouver une formule. Si nous écrivons la ligne du tableau ci-dessus à une génération *n*, nous obtenons :

n	U_n	$2n$	U_n/U_{n+1}			$2n-1$
$n+1$	U_{n+1}	$2(n+1)$				

Ce qui veut dire que $(2n)\times\frac{U_n}{U_{n+1}}=2n-1$. Cela nous a donné : $U_{n+1}=\frac{2n}{2n-1}\times U_n$ avec $U_1=1$

Nous avons vérifié dans un tableur notre formule :

Génération	1/Hauteur	Formule
1	1,0000000	1,0000000
2	2,0000000	2,0000000
3	2,6666667	2,6666667
4	3,2000000	3,2000000
5	3,6571429	3,6571429
6	4,0634921	4,0634921
7	4,4329004	4,4329004
8	4,7738928	4,7738928
9	5,0921523	5,0921523
10	5,3916907	5,3916907
11	5,6754639	5,6754639
12	5,9457240	5,9457240
13	6,2042338	6,2042338
14	6,4524031	6,4524031
15	6,6913810	6,6913810
16	6,9221183	6,9221183
17	7,1454124	7,1454124
18	7,3619401	7,3619401
19	7,5722812	7,5722812
20	7,7769375	7,7769375
21	7,9763461	7,9763461
22	8,1708912	8,1708912
23	8,3609119	8,3609119
24	8,5467099	8,5467099
25	8,7285548	8,7285548
26	8,9066886	8,9066886

VICTOIRE !!!!!!!

Ainsi, si on veut savoir la hauteur de la centième génération de fourmis, il suffit de calculer $\frac{1}{U_{50}}\simeq 0{,}08$

En effet la suite U_n donne les inverses des hauteurs et il faut se souvenir que les hauteurs évoluent tous les deux passages, c'est pour cela que nous prenons l'indice 50.

Le problème de la formule que nous avons établie c'est qu'elle est définie par récurrence. Lors de nos rencontres avec notre chercheur, il nous a donné quelques pistes :

- Pour une formule en fonction de n.

Nous avons $U_n = \frac{2n-2}{2n-3} \times U_{n-1}$ avec $U_1 = 1$

$U_n = \frac{2n-2}{2n-3} \times \frac{2(n-1)-2}{2(n-1)-3} \times U_{n-2} = \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)} \times U_{n-2}$ si on poursuit

$U_n = \frac{(2n-2)(2n-4)\dots(4)(2)}{(2n-3)(2n-5)\dots(3)(1)} \times U_1$

Par exemple $U_{10} = \frac{18 \times 16 \times 14 \times 12 \times \dots \times 4 \times 2}{17 \times 15 \times 13 \times 11 \times \dots \times 3 \times 1}$

- Pour retrouver la formule avec l'aide du triangle de Pascal

Si on regarde pour chaque génération l'ordonnée des points nous obtenons ceci

Génération	Ordonnées des points
1 (initiale)	0 1 0
2	0 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0
3	0 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ $\frac{1}{4}$ 0
4	0 $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{8}$ 0
5	0 $\frac{1}{16}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{1}{16}$ 0

On peut remarquer que les chiffres des numérateurs correspondent à ceux du triangle de Pascal. On remarque aussi qu'à chaque génération le dénominateur est multiplié par 2 .

Par exemple la hauteur du $p^{\text{ème}}$ point de la génération n sera :
Si $p=1$ ou $p=n+2$, il fera zéro

Si non $\frac{\binom{n-1}{p-1}}{2^{n-1}}$

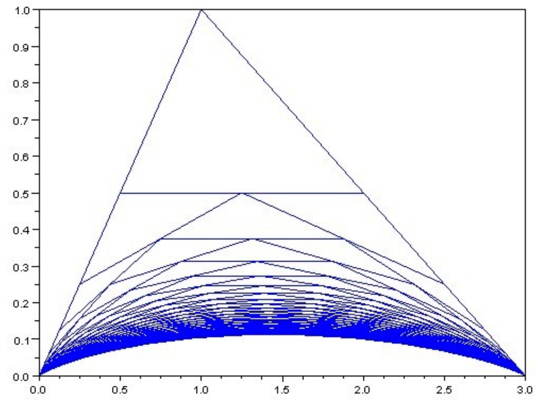
Triangle de Pascal :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

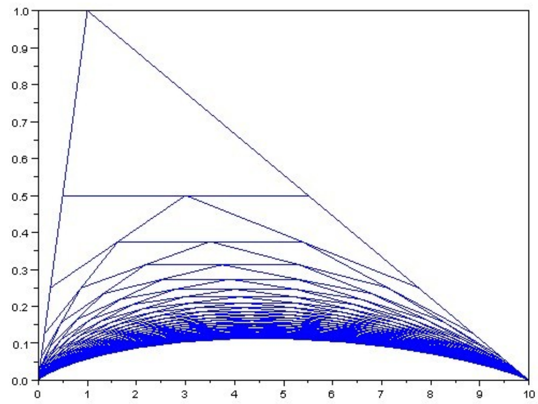
Dans tous les cas, nous n'avons pas la limite de cette suite et nous ne pouvons pas démontrer que les chemins des fourmis tendent vers le segment.

<u>Qu'est ce qu'il se passe si le triangle de départ de la fourmi n'est pas isocèle</u> :

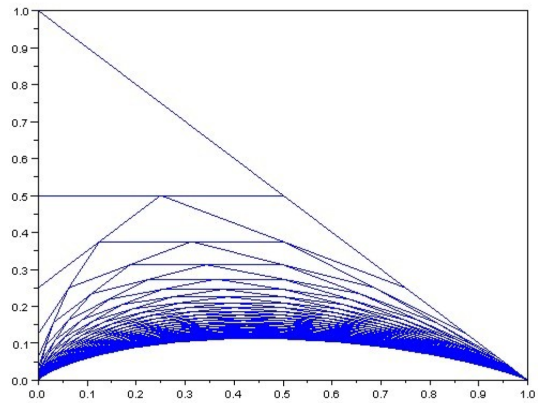
Si la fourmi ne fait pas ses deux déplacements de la même longueur nous obtenons comme première génération des triangles quelconques. Nous avons réalisé plusieurs cas de figures et avons vu que dans chaque cas le chemin des fourmis semblait tendre vers le segment.



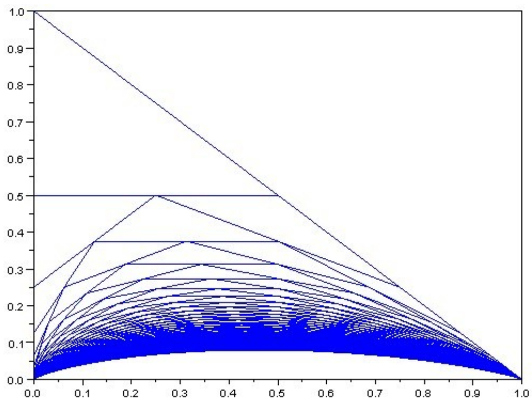
50 générations avec comme suite initiale
v=[0 1+i 3]



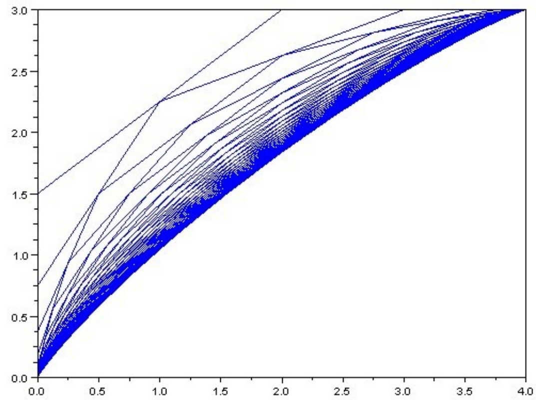
50 générations avec comme suite initiale
W=[0 1+i 10]



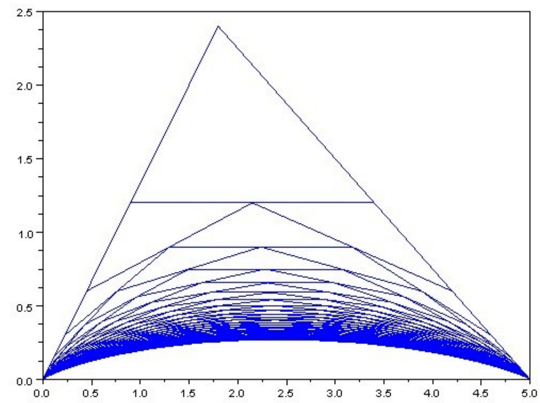
50 générations avec comme suite initiale



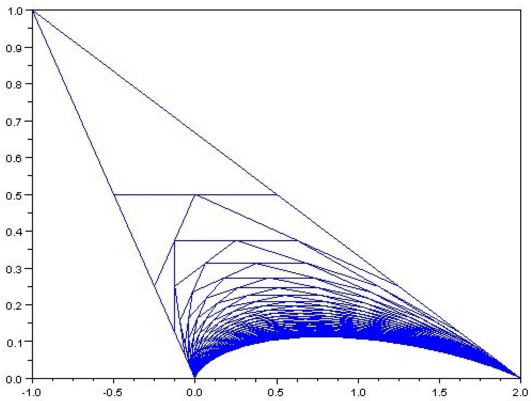
X=[0 i 10]100 générations avec comme suite initiale
X=[0 i 10]



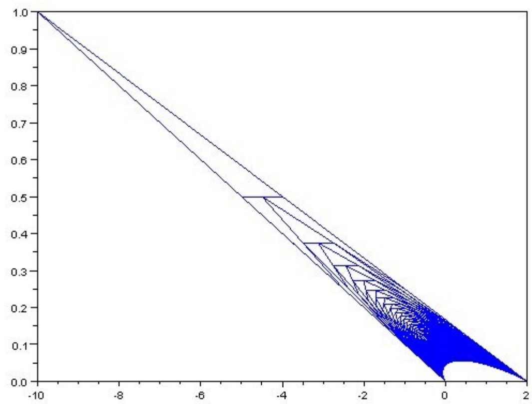
50 générations avec comme suite initiale
Y=[0 3 4+3i]



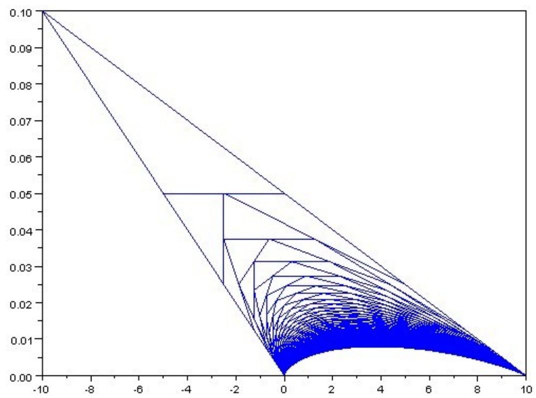
50 générations avec comme suite initiale
Z=[0 9/5+12/5i 5]



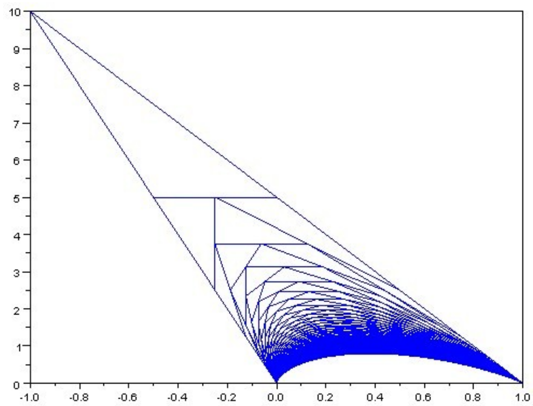
50 générations avec comme suite initiale
A=[0 -1+i 2]



200 générations avec comme suite initiale
B=[0 -10+i 2]



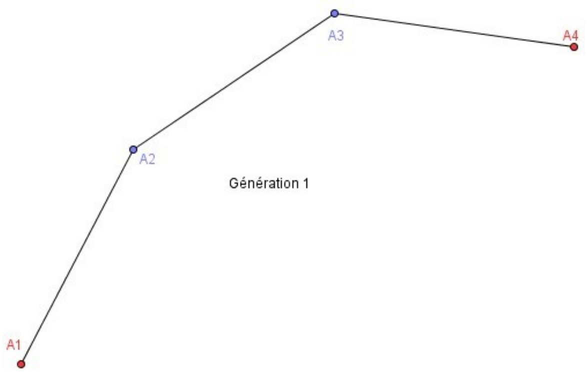
100 générations avec comme suite initiale
C=[0 -10+0,1i 10]

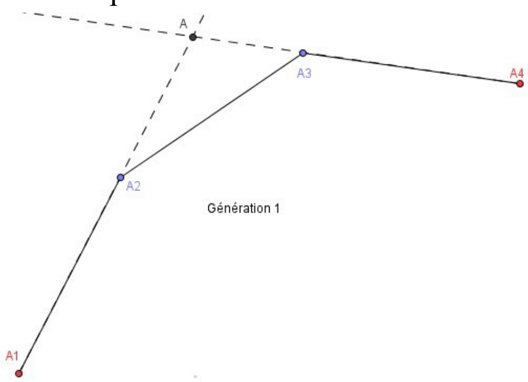


100 générations avec comme suite initiale
D=[0 -1+10i 1]

<u>Dans le cas de trois sauts en première génération</u> :

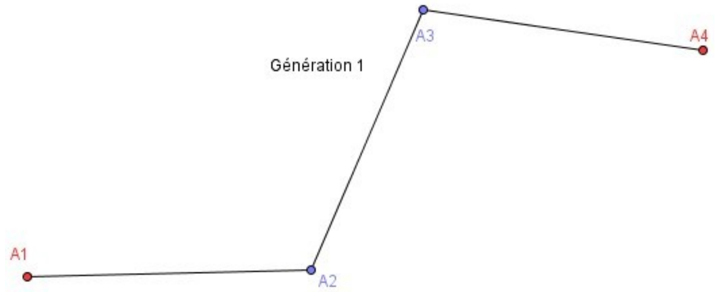
Si la première fourmi fait 3 déplacements (et non deux) alors on peut revenir au cas précédent. En effet si la génération 1 (initiale) fait le chemin suivant par exemple

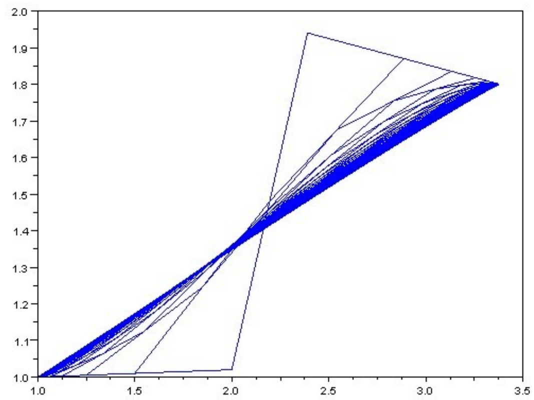




Alors si on prolonge les droites (A_1A_2) et (A_3A_4) on revient au cas du triangle, on a gagné une génération. Certes A_2 n'est pas le milieu de $[A_1A]$ et A_3 le milieu de $[AA_4]$ mais si on ne prend pas les milieux pour quelques générations cela ne semble pas changer la convergence.

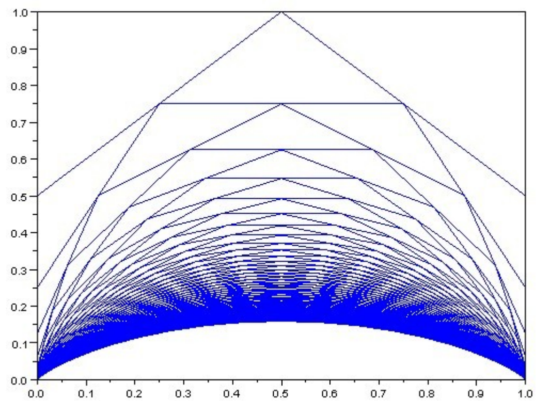
Il y a le cas où A_2 et A_3 ne sont pas du même coté du segment $[A_1A_4]$, par exemple

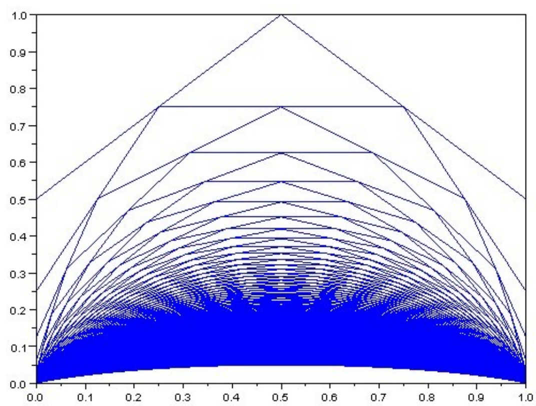




Avec le logiciel Scilab, sur 50 générations dans le cas ci-dessus nous arrivons à :
Décidément, dans tous les cas notre algorithme semble converger vers le segment. Nous avons aussi remarqué que la convergence semble plus rapide quand nous avons des points de part et d'autre du segment.

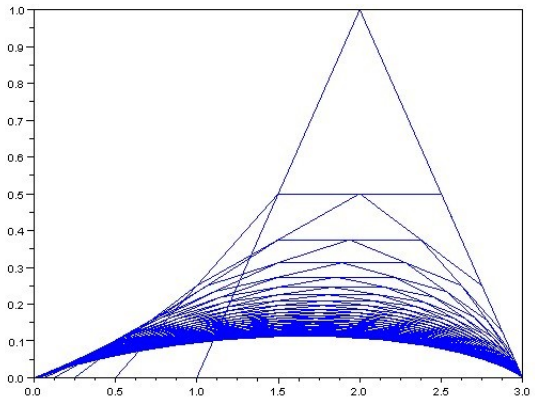
Le carré F=[0 i 1+i 1] avec 100 générations et 1000 générations



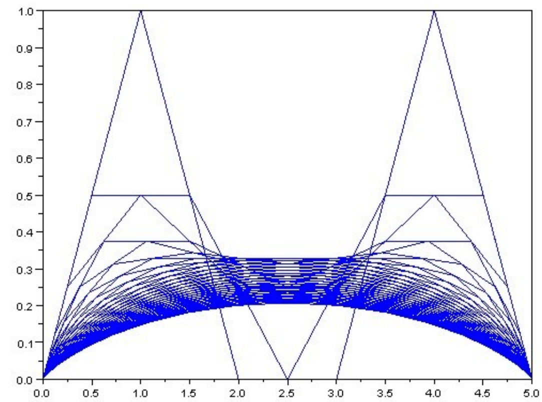


<u>Qu'est-ce qu'il se passe si un des points du chemin initial est déjà sur le segment ?</u>

En effet si un des points du chemin initial est déjà aligné avec le point de départ et le point d'arrivée nous observons :



50 générations avec comme suite initiale G=[0 1 2+i 3]



50 générations avec comme suite initiale H=[0 1+i 2 3 4+i 5]