

LE COLORIAGE DES CARTES : 6 couleurs pour une carte !

Par Anaïs LOISON, Meryam CHELOUFI et Marion SERRE
élèves de Term. S du Lycée d'Altitude de Briançon

Engagées dans cette aventure de coloriage de cartes, nous vous proposons de suivre un chemin initiatique qui vous mènera au pays des couleurs !!!!

Vocabulaire :

CARTE : espace divisé en plusieurs blocs (pays)
UN PAYS : si on prend deux points quelconques, il existe un chemin pour aller de l'un à l'autre sans être obligé de sortir du pays.
DEUX PAYS : si on prend deux pays quelconques, quel que soit le chemin que l'on suit pour les relier, on est obligé de passer par une frontière.



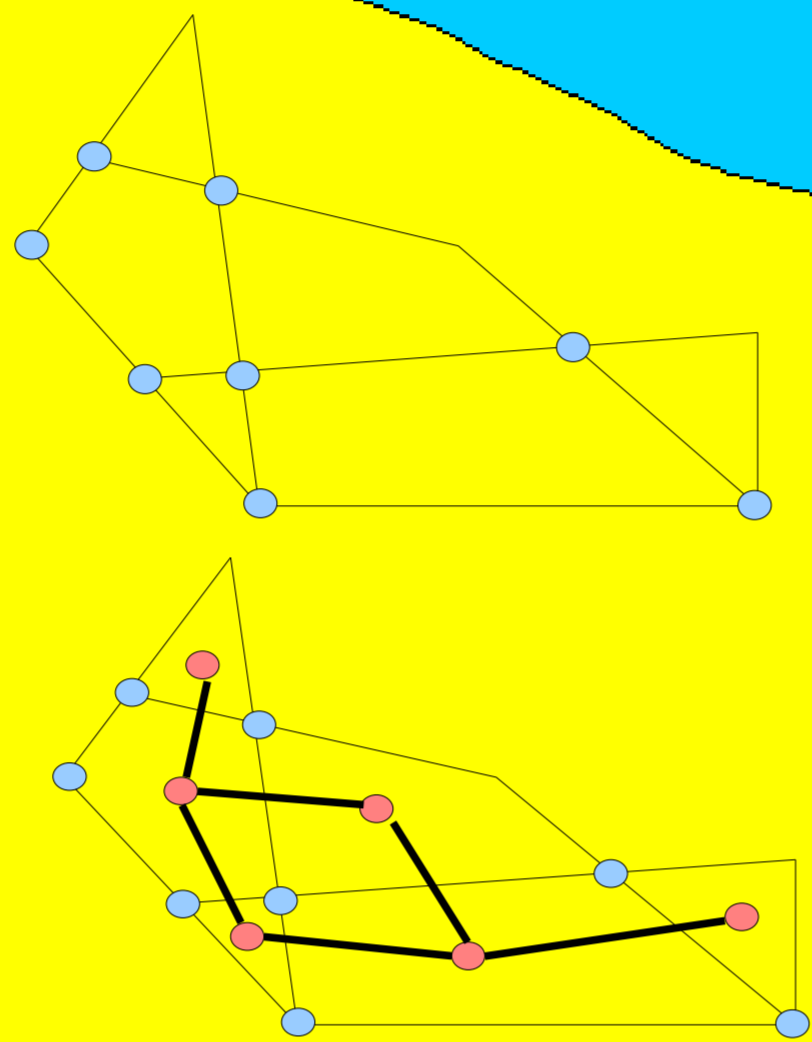
Notations :

On considère un graphe et on note S le nombre de sommets, P le nombre de pays et A le nombre d'arêtes.

Exemple: 8 sommets, 6 pays et 13 arêtes

A partir d'un graphe de départ, on prend pour chaque pays une capitale et on relie entre elles les capitales des pays voisins : on obtient alors un **GRAPHE DUAL**.

Le dual a 6 sommets, 1 pays et 6 arêtes



Les outils :

A partir d'observations et d'une longue démonstration (par récurrence), on arrive à la **FORMULE D'EULER** :

$P = A - S + 1$. On a donc trouvé un lien entre pays, sommets et arêtes !

Pour un graphe dual, chaque pays a au moins 3 arêtes, et une arête peut appartenir à 2 pays au plus, donc :

Pour tout graphe :

$$S^* + P^* - A^* = 1 \text{ (formule d'Euler) et}$$

ce qui donne $A^* - S^* + 1 \leq 2/3 A^*$, après simplification $A^* + 3 \leq 3S^*$

Démonstration que 6 couleurs suffisent pour colorier une carte :

Pour démontrer qu'avec 6 couleurs on peut colorier n'importe quelle carte, on va montrer que, dans toute carte, il y a au moins un pays ayant moins de 6 voisins quelle que soit la carte.

RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE :

On suppose que, pour une carte, tous les pays ont plus de 6 voisins. Chaque sommet a au moins 6 arêtes et chaque arête peut être coloriée au plus 2 fois, donc

$$6S^* \leq 2 A^* \text{ soit } 3S^* \leq A^*$$

Ce qui donne, en appliquant le résultat précédent, $A^* + 3 \leq A^*$

CONTRADICTION

donc notre hypothèse de départ est fautive : il y a au moins un pays ayant moins de 6 voisins quelle que soit la carte.

Comment colorie-t-on une carte ?

On compte le nombre de voisins de chaque pays, et on les liste.

On recherche celui qui en a le moins, on l'élimine ensuite de la liste.

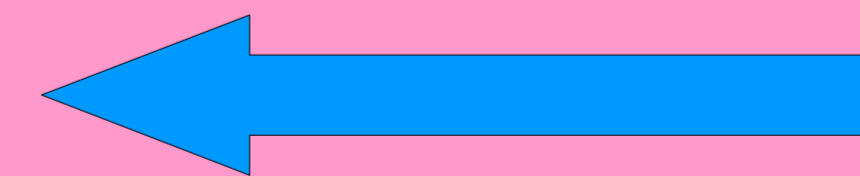
On procède ainsi par élimination successive de pays. On établit de la sorte une liste de pays par ordre croissant de voisins.

On colorie enfin les pays suivant la liste établie; le sens de lecture sera du dernier au premier pays.

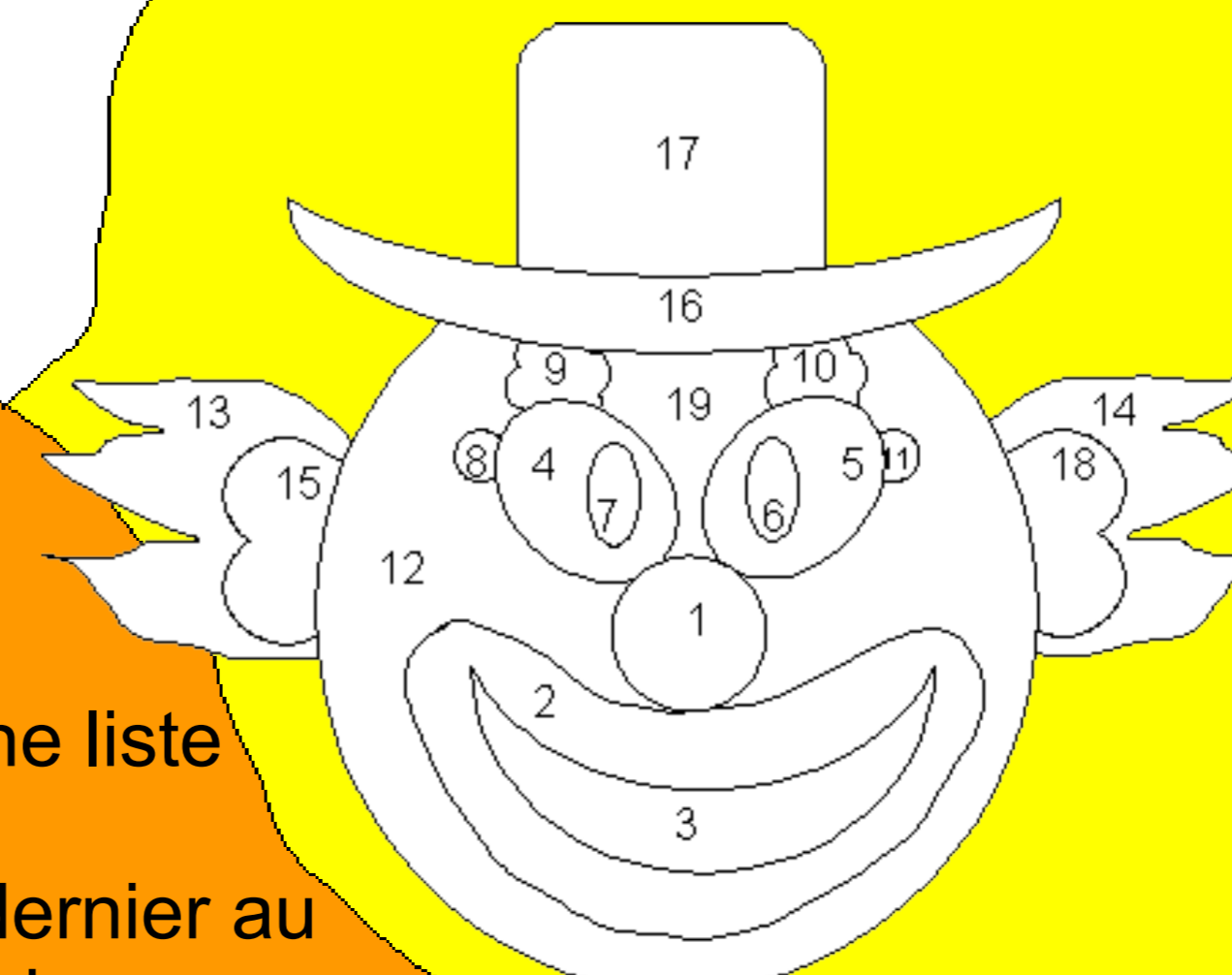


Pour finir, on colorie la carte en suivant l'ordre inverse de cette liste, c'est-à-dire en commençant par le pays 12 et en finissant par le pays 3.

Étape 2 : on établit la liste des pays par ordre croissant de voisins, qui sera le support de notre coloriage:
3-6-7-17-8-11-13-14-15-18-2-9-10-1-16-4-5-19-12



Étape 1 : on établit la liste des voisins de chaque pays:



- pays 1 : 4,5,2,12,19
- pays 2 : 1,3,12
- pays 3 : 2
- pays 4 : 7,8,9,12,19,1
- pays 5 : 6,10,11,12,19,1
- pays 6 : 5
- pays 7 : 4
- pays 8 : 12,4
- pays 9 : 12,4,16,19
- pays 10 : 16,12,5,19
- pays 11 : 12,5
- pays 12 : 2,1,5,4,8,9,10,11,13,14,15,16,18
- pays 13 : 12,15
- pays 14 : 18,12
- pays 15 : 12,13
- pays 16 : 9,10,12,17,19
- pays 17 : 16
- pays 18 : 14,12
- pays 19 : 16,9,4,1,5,10